LYCEE /B/HGHZEZ/	DEVOIR DE SYNTHESE NI
MATHEMATIQUES (3 h)	4MATH

EXERCICE I(4 points)

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d' affixes respectives w et 1 ou w est un nombre complexe donné différent de 1. Soit f l' application de P\B dans P, qui à tout point M d' affixe z, associe le point M' d ' affixe z' telle que : $z'=\frac{z-w}{z-1}$

1/Montrer que les affixes des points invariants par f sont solutions de l 'équation (E) $z^2-2z+w=0$

2/a) On suppose que $w=1+e^{i\theta}$ ou $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$. Résoudre l'équation (E)

b) Mettre sous la forme trigonométrique chacune des solutions de (E).

3/Dans cette question on suppose que w = -1 . Soit M un point de P\ B et M' son image par f

a) Montrer que $(\vec{u},\overrightarrow{BM})+(\vec{u},\overrightarrow{BM'})\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$ .En déduire que la demi-droite [BA) est une bissectrice de l' angle $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'})$

b) Montrer que z' est imaginaire pur si et seulement si $|z|=1$

c) Endéduire une construction du point M' image d'un point M du cercle trigonométrique privé du point B

EXERCICE II (5points)

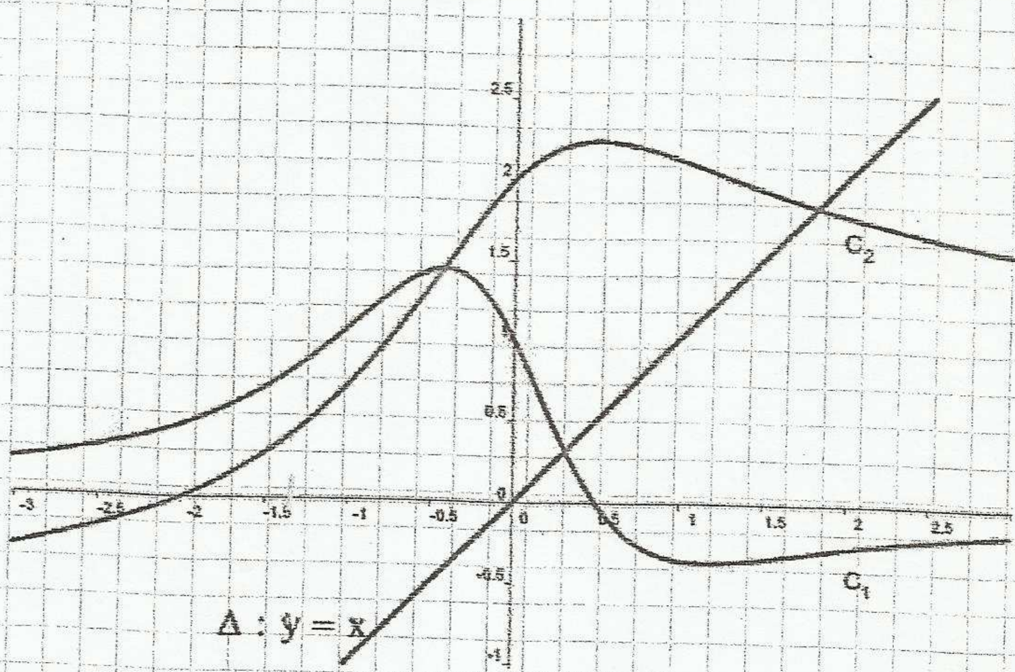
Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et on désigne par O le milieu du segment [BC] (Voir figure donnée en annexe, que l'on complètera au fur et à mesure)

1. Montrer que le triangle OCA est équilatéral.
2. (a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie O sur A et B sur C.
   (b) Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle. Construire son centre I sur la figure donnée en annexe.
   (c) En calculant $\left(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IO}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IA}}\right)$, montrer que I appartient au segment [AB]
3. Soit R la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
   (a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f\circ R$.
   (b) Soit C' l'image de C par f.
   Déterminer $(f\circ R)(C)$. En déduire que A est le milieu du segment $[CC']$
4. (a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g tel que $g(O)=A$ et $g(B)=C$.
   (b) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.
   (c) Montrer que $g(C)=C'$

youssefboulila

EXERCICE IV (4points)

Dans le graphique ci-dessous C_1 et C_2 sont les courbes représentatives d'une fonction f définie sur [-3 , 3] et de sa fonction dérivée f'.



L'élève utilisera le graphique ci-dessus comme source des données

1) Justifier que C_1 ne peut pas être la courbe de f. **0,5**

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - 2}{x}$. **0,5**

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\left]\frac{3}{2}, 2\right[$ une solution unique α. **0,5**

4) Soit u la suite définie sur IN par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$; $\forall n \in IN$

a/ Montrer que pour tout $n \in IN$, $\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$. **0,5**

b/ Montrer que pour tout $n \in IN$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ **0,75**

c/ En déduire que $\forall n \in IN$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. **0,75**

EXERCICEIII (7 points)

1°/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t+1}}$

0,75 a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et établir que pour tout $t\geq 0$ on a : $-\frac{1}{2}\leq f'(t)\leq 0$

0,5 b) Endéduire à l' aide des inégalités des accroissements fins que pour tout $x \geq 0$,

$$x-\frac{x^2}{2}\leq \frac{x}{\sqrt{x+1}}\leq x$$

c) Montrer que la fonction U définie sur $[0,1]$ par $U(x)=x-\frac{x^2}{2}$ réalise une

1 bijection de $[0,1]$ sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et expliciter $U^{-1}(x)$ pour tout $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$

C_g,

2°/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ et C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

0,5 a) Interpréter graphiquement la double inégalité démontrée en 1°/b).

0,5 b) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. On note g^{-1} la fonction réciproque de g.

1 c) Tracer dans le même repère les courbes C_g, $C_{g^{-1}}$, C_U et $C_{U^{-1}}$.

3°/ Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $U_{n+1}=g^{-1}(U_n)$, $n\geq 0$.

0,5 a) Montrer que (U_n) est croissante.

0,5 b) Montrer que (U_n) est non majorée.

0,5 c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

0,25 4°/a) En utilisant la question 2°/c), justifier que pour tout $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $x\leq g^{-1}(x)\leq 1-\sqrt{1-2x}$.

b) En déduire la limite de la suite (V_n) définie par $V_n=ng^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.

0,25 i) En utilisant 4/ a)

0,25 ii) En utilisant la dérivabilité de g^{-1} en 0

5/ On pose pour tout x de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ $h(x)=f(1-2\cos 2x)$

0,25 a) Montrer que h réalise une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur K à préciser

0,25 b) Etudier la dérivabilité de h^{-1}sur K et calculer sa dérivée

youssefboulila