Mathématiques	Devoir de Synthèse N°1	
4ème Maths : M1 Date : le 06 / 12 / 2010	Durée : 3heures Coefficient : 4	*Enseignant :Karmous Abdelhamid*

EXERCICE N° 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O , $\vec{U}, \vec{V}$) . On considere l'equation (E_θ) : (1 – i) z² - 2(cosθ + sinθ) z + 1 + i = 0 où θ un reel de $[0\,,\pi]$

1) a) Vérifier que $z_1 = e^{i\,\theta}$ est une solution de (E_θ) .Trouver z_2 l'autre solution .

   b) Préciser la valeur de θ pour laquelle $z_1 = z_2$. Calculer dans ce cas : $z_1{}^{2010}$

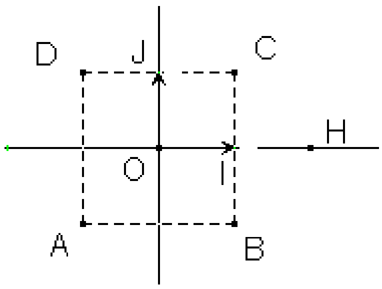
2) Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $e^{i\,\theta}$ et $ie^{-i\,\theta}$

   a) Déterminer et construire l'ensemble (C) décrit par M_1 lorsque θ varie .

   b) Déterminer la valeur de θ pour laquelle M_2 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

EXERCICE N° 2

On donne dans le plan complexe P un repère orthonormé direct (O , $\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}$) la figure suivante :



1) Soit f l'isométrie du plan tel que f (C) = B , f(A) = D et f (D) = C
   a) Déterminer f (O) et fof (D) .
   b) **En déduire** la nature de f et donner ses éléments caractéristiques.
   c) Donner l'écriture complexe de f .
2) Soit g : P → P

   M (z) → M'(z') avec $z' = -i\bar{z} + (1 + i)$
   a) Montrer que g est une isométrie de P .
   b) Determiner g(I) et g (J) . En déduire la nature de g .
   c) Déterminer g (O) , g (H) et g (B) .
3) Soit l'isométrie h : P → P

   M (z) → M'(z') avec $z' = -i\bar{z} + 2$
   a) Determiner h (C) , h (D) et h (O) .
   b) En déduire que h n'a pas des points invariants. Puis déterminer sa nature .
   c) Vérifier que h = g o $T_{\overrightarrow{OB}}$.
4) Determiner ; h^{-1} of (D) et h^{-1} of (C) ; puis determiner la nature de h^{-1} of .

EXERCICE N° 3

Soit f la fonction définie sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \sqrt{tgx}$

1) Etudier la dérivabilité de f a droite en 0 . Interpréter graphiquement ce résultat .

2) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   On note g la fonction réciproque de f .

3) Montrer que g est dérivable sur $[0\,,+\infty[$ et que $g'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$

4) a) Montrer que pour tout x de $[0\,,+\infty[$; $g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

   b) En déduire que $\forall$ x $\in$ IR : $g\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) + g\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)$ est une constante que l'on précisera .

5) Soit $n \in IN^*$. On pose $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=o}^{n} g\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)$.

   a) montrer que pour tout n de IN^* on a : $\frac{n+1}{n}\, g\left(1+\frac{1}{2n}\right) \leq U_n \leq \frac{n+1}{n}\, g\left(1+\frac{1}{n}\right)$

   b) En déduire la limite de la suite (U_n) .

EXERCICE N° 4

1) Soit h la fonction définie sur $[1\,,+\infty[$ par $h(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}$.

   Etudier les variations de h et en déduire que pour tout x de $[1\,,+\infty[$ on a : $-\frac{1}{2} \leq h(x) < 0$.

2) Soit f la fonction définie sur $[1\,,+\infty[$ par $f(x) = 1 - x + \sqrt{3+x^2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

   a) Etudier les variations de f .

   b) Montrer que f réalise une bijection de $[1\,,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   c) Tracer dans le même repère les deux courbes (C) et (C') où (C') celle de f^{-1} .

   d) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

3) a) Montrer que pour tout $n \in IN^* \setminus \{1\}$, l'équation : $f(x) = 2 - \frac{1}{n}$ admet une unique solution α_n dans l'intervalle $[1\,,+\infty[$

   b) Etudier la monotonie de la suite (α_n) . En déduire qu'elle est convergente .

   c) Soit L la limite de la suite α_n ; montrer que f (L) = 2 et déduire la valeur de L

4) Montrer que l'équation f(x) = x admet une unique solution a et que $\frac{3}{2} < a < 2$.