Lycée ch -khaznadar Teboursouk Prof : Rakrouki .M	**Devoir de Synthèse n°1**	Classe : 4ème Math Durée : 180 minutes Date : 06/12/10

<u>Une grande importance sera attachée à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation</u>

<u>EXERCICE1 (3pts):</u>

1) Le quotient de -430 par 17 est :

$a)\ -24$ ■ ; $b)\ -25$ ■ ; $c)\ -26$ ■.

2) Le chiffre des unités de l'entier 9^{2011} est :

$a)\ 0$ ■ ; $b)\ 1$ ■ ; $c)\ 9$ ■.

3) Soit n un entier tel que : $n \equiv 19[20]$ alors le reste modulo 20 de $n^{100}+n^{181}$ est :

$a)\ 19$ ■ ; $b)\ 2$ ■ ; $c)\ 0$ ■.

4) Soit x un entier vérifiant : $x^2+2x \equiv 3[7]$ alors :

$a)\ x \equiv 2[7]$ ■ ; $b)\ x \equiv 3[7]$ ■ ; $c)\ x \equiv 1[7]\ ou\ x \equiv 4[7]$ ■

<u>EXERCICE2 (3pts):</u>

Dans le plan orienté, on considère un rectangle direct ABCD tel que $AB = 2AD$. Soient I , J et K les points définis par : $I = A*B$, $J = D*C$ et $K = S_{(DC)}(I)$. On pose : $f = S_{(IC)} o t_{\overrightarrow{AB}} o S_{(IJ)}$ et $g = t_{\overrightarrow{IK}} o S_{(IC)}$.

1) Caractériser l'application $S_{(BC)} o S_{(IJ)}$ puis déduire que f est une rotation que l'on caractérisera.

2) Caractériser l'isométrie $g o S_{(AJ)}$ puis déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

3) Soit $K' = S_C(B)$. Déterminer $g o f^{-1}(K)$ et $g o f^{-1}(K')$ puis déduire la nature de $g o f^{-1}$.

<u>EXERCICE3 (3pts):</u>

On considère l'équation : $(E): z^3+\alpha z^2-\overline{\alpha}z-1=0$, $\alpha \in$ ■*.

1)a)Montrer que si z_0 , z_1 et z_2 sont les solutions de (E) alors $z_0 z_1 z_2 = 1$.

b) Montrer que si z est une solution de (E) alors $\dfrac{1}{z}$ est aussi solution de (E).

c) En déduire que (E) admet au moins une solution de module 1.

2) On suppose que $\alpha = e^{i\theta}$, $\theta \in$ ■ .

Vérifier que $-\alpha$ est une solution de (E) puis déterminer les autres solutions.

3) Utiliser ce qui précède pour résoudre dans ■ l'équation $(E'): 2z^3+(1+i\sqrt{3})z^2-(1-i\sqrt{3})z-2=0$.

<u>EXERCICE4(5pts) :</u>

Soit f la fonction définie sur $]1;2]$ $par : f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$.

1)a)Etudier la dérivabilité de f à gauche en 2. Interpréter le résultat graphiquement.

b) Dresser le tableau de variations de f et construire sa courbe ζ_f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

2) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $\left]1;2\right]$ une unique solution α et que $3/2<\alpha<2$.

3)a) Montrer que f est une bijection de $\left]1;2\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Construire la courbe $\zeta_{f^{-1}}$ de f^{-1} dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

c) Montrer que pour tout $x\in J$, $f^{-1}(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

4) Soit U la suite définie sur IN par : $U_0=1$ *et* $U_{n+1}=f^{-1}(U_n)$.

a) Montrer que pour tout $n\in IN$, $1\le U_n\le 2$.

b) Montrer que pour tout $x\in\left[1;2\right]$, $\left|\left(f^{-1}\right)'(x)\right|\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

c) Montrer que $\forall n\in IN$, $\left|U_{n+1}-\alpha\right|\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left|U_n-\alpha\right|$ puis déduire que U converge et calculer sa limite.

EXERCICE5 (6pts):

Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$ *par :* $f(x)=-tg(\pi x)$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$ *sur* IR.

2) Soit h la fonction réciproque de f. Montrer que h est dérivable sur IR et que $\forall x\in IR$, $h'(x)=\dfrac{-1}{\pi(1+x^2)}$.

3) Soit φ la fonction définie sur $\left[0;1\right[$ *par :* $\varphi(x)=h\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

a) Montrer que φ est dérivable sur $\left[0;1\right[$ et calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x\in\left[0;1\right[$.

b) En déduire que $\forall x\in\left[0;1\right[$, $\varphi(x)=h(x)-\dfrac{1}{4}$.

4) Soit g la fonction définie sur $\left[0;1\right[$ par : $g(x)=\varphi(x)-(1+2x)h(x)$.

a) Montrer que g est deux fois dérivable sur $\left[0;1\right[$ et calculer g '(x) et g ''(x).

b) Etudier les variations de g ' sur $\left[0;1\right[$ puis déduire celle de g.

c) En déduire qu'il existe un unique réel $c\in\left]0;1\right[$ tel que $c=tg\left(\dfrac{\pi}{8c}\right)$.

5) Soient U et V les suites définies sur IN*_{1} par : $U_n=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}h\left(\dfrac{1}{k}\right)$ *et* $V_n=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}h\left(1-\dfrac{2}{1-k}\right)$.

a) Déterminer un encadrement de U_n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

b) Montrer que $V_n=U_n-\dfrac{1}{4}$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$.

BON TRAVAIL