L. Regueb	Mathématiques	Classe : 4ème M
Prof : Salhi Noureddine	Devoir de Synthèse №1	Le : 06/12/2010 Durée : 3h

Exercice1(5pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = z^2 - 4z$.

1) Soient A et B les points d'affixes $z_A = 1 - i$ et $z_B = 3 + i$.

a) Calculer les affixes des points A' et B' images des points A et B par f .

b) On suppose que deux points ont la même image par f, démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera .

2) Soit I le point d'affixe -3 .

a) Démontrer que OMIM' est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3z + 3 = 0$.

b) Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.

3)a) Exprimer $(z' + 4)$ en fonction de $(z - 2)$. En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ puis entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg(z - 2)$.

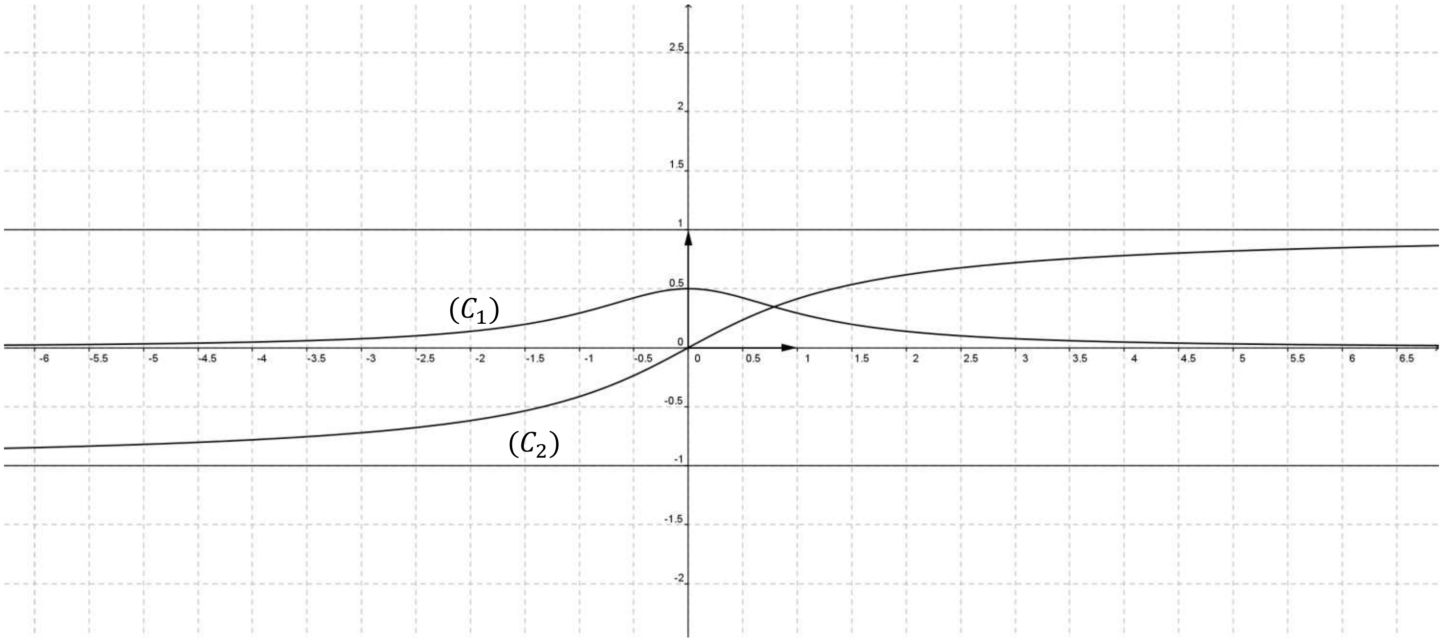
b) On considère les points J et K d'affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$.

Démontrer que tous les points M du cercle (Γ) de centre J et de rayon 2 ont leur image M' sur un même cercle que l'on déterminera.

c) Soit E le point d'affixe $z_E = -4 - 3i$.

Donner la forme trigonométrique de $(z_E + 4)$ et à l'aide du 3)a) démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E. Préciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.

Exercice2(6pts)



Dans la figure ci-dessus on a représenté la courbe d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et la courbe de sa fonction dérivée f'.

$*$ La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$*$ L'axe (Ox) est une asymptote à (C_1) aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$.

$*$ Les droites d'équations respectives y = 1 et y = -1 sont des asymptotes à (C_2).

1) justifier que (C_2) est la courbe représentative de f.

2) Dresser les tableaux des variations de f et f'.

3) Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C_2) au point d'abscisse 0.

4) On pose g(x) = f(x) $-\frac{1}{2}$x , x$\in \mathbb{R}$.

a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

b) En déduire le signe de g, puis déterminer les positions relatives de (C_2) et (T).

c) Montrer que le point O(0,0) est un point d'inflexion de (C_2) .

5) montrer que pour tous réels a et b , $|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b - a|$.

6) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : u_0 = 1 et $u_{n+1} = f(u_n)$, n$\in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout n$\in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$

b) En utilisant les inégalités des accroissements finis à f , montrer que pour tout n$\in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\, u_n$.

Prouver alors que la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$ et convergente.

c) En déduire que pour tout n$\in \mathbb{N}$, $0\leq u_n \leq \frac{1}{2^n}$. Déduire la limite de (u_n) .

Exercice3(5pts)

Soit AFED un carré de coté 4 cm tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et soit O son centre .On désigne par B et O_1 les symétriques respectifs de A et O par rapport à la droite (EF).

1)a) Soit r la rotation définie par r(F) = E et r(E) = D . Préciser l'angle et le centre de r .

b) Soit $= r \circ S_{(OO_1)}$. Montrer que f est la symétrie orthogonale d'axe (OE).

2) Soit $r' = t_{(\overrightarrow{OO_1})} \circ r^{-1}$ ou r^{-1} désigne la rotation réciproque de r.

a) Montrer que r' est une rotation dont on précisera l'angle.

b) Déterminer $r'(O)$. En déduire que F est le centre de r'.

3) On désigne par g l'antidéplacement défini par g(D) = F et g(O) = O_1.

a) Montrer que g est une symétrie glissante et déterminer sa forme réduite.

b) Soit M un point du plan, montrer que :

$[\,g(M) = r'(M)\,]$ si et seulement si $[\,f(M) = M\,]$.

c) En déduire l'ensemble des points M tels que $g(M) = r'(M)$.

Exercice4(4pts)

On considère la fonction : $f\;\; x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

1) Vérifier que l'ensemble de définition de f est $]-1\,,1]$.

2)a) Montrer que f est dérivable sur $]-1\,,1[$ et que pour tout x de $]-1\,,1[$ on a : $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$.

b) En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

c) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour x réel de J.

3) Pour tout x de $\left]0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ on pose $g(x) = f(tan^2(x))$.

a) Vérifier que $(x) = \sqrt{\cos(2x)}$.

b) Montrer que g réalise une bijection de $\left]0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ sur un intervalle K qu'on précisera.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]0\,,1[$ et que pour tout x de $]0\,,1[$ on a : $(g^{-1})'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$.