L.S.C.J.Gafsa | **Date:** *6 Décembre 2010* | **Classe:** *4è.Math.*

Prof: *B.Tabbabi* | ***DEVOIR DE SYNTHESE N°1*** | **Durée:** *3 heures*

Exercice 1 : *(3 points)*

Répondre par " vrai " ou " faux " (aucune justification n'est demandée).

1.La fonction $f : x \mapsto x\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ est dérivable sur $[0,1[$.

2.L a dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(\cos x)$ est la fonction $x \mapsto \cos(\cos x)$.

3.L a fonction $x \mapsto x\ \mathrm{cotan}(x)$ est prolongeable par continuité en 0.

4.L'équation $\sqrt{1-x^3} = x$ admet dans $[0,1]$ une solution unique.

Exercice 2 : *(4 points)*

Soit f est une fonction définie,continue sur $]0,+\infty[$ et dérivable sur les intervalles $]0,2[$ et $[2,+\infty[$.

(C) est la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction dérivée f' de f.

x	0		1		2		4		$+\infty$
f'	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ 1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

1.Déterminer l'extremum de f et l'abscisse du point d'inflexion de (C).

2.Comparer $f(2)$ et $f(4)$ en justifiant.

3.Montrer que $f(4) \leq 2 + f(2)$ (on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis).

4.Donner le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sachant que $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(4) = 2$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = -\infty$.

5.On donne $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$.Donner l'allure de (C) en précisant le points remarquables et les demi-tangentes.

Exercice 3 : *(5 points)*

Soit a un nombre complexe .On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation:

$(E) : z^2 + (a - 2 - ia)z + ia(2 - a) = 0$.

1.Vérifier que ia est solution de (E) puis résoudre (E).

2.Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,on considère les points A,B et C d'affixes respectives ia, $2 - a$ et $-a$.

a.Montrer que A,B et C sont distincts deux à deux si et seulement si $a \notin \{0, 1-i\}$.

b.Montrer que OABC est un losange si et seulement si $a = -2i$.

3.On considère l'application $f : P \to P$ $\quad M(z) \mapsto M'(z')$; $z' = iz + 2$.

a.Déterminer la nature de f et donner ses éléments caractéristiques.

b. Déterminer l'image de A par f.

c.Soit Ω le point tel que ΩAB est un triangle rectangle et isocèle en Ω de sens direct .

Montrer que lorsque a varie le point Ω reste fixe.

voir verso $\Rightarrow$

Exercice 4: *(4 points)*

Dans le plan orienté,on considère un carré direct ABCD de centre O.On note par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ *et* $[BC]$.

1.Soit f *l'isométrie telle que* $f(A) = B$, $f(B) = C$ *et* $f(C) = D$.

a.Déterminer l'image de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ *par f.En déduire que f est un déplacement.*

b.Vérifier que f est une rotation que l'on caractérisera.

2.Soit l'application $g = f \circ S_{(AB)}$.

a.Déterminer g (A) et g (B). En déduire que g est une symétrie glissante.

b.Déterminer l'axe et le vecteur de g.

3.a.Montrer que $g \circ f^{-1} = S_{(BC)}$.

b.En déduire que les images d'un point M par f et g respectivement sont symétriques par rapport à la droite (BC).

4.Soit R la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$*.Caractériser l'application* $h = f \circ R$.

Exercice 5: *(4 points)*

On considère les suites u et v définie sur $\mathbb{N}$ *par* $u_0 = v_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{3 - v_n}$ *et* $v_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}$.

1.Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$; $0 \leq u_n \leq 3$ *et* $0 \leq v_n \leq 3$.

2.On définit les suites (a_n) *et* (b_n) *sur* $\mathbb{N}$ *par :* $a_n = u_n - 1$ *et* $b_n = v_n - 2$.

a.Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ *on a:* $|a_{n+1}| \leq |b_n|$ *et* $|b_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2}|a_n|$.

En déduire que $|a_{n+2}| \leq \dfrac{1}{2}|a_n|$ *et* $|b_{n+2}| \leq \dfrac{1}{2}|b_n|$.

b.Montrer alors , par récurrence, que pour tout n de $\mathbb{N}$ *on a :* $|a_{2n}| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *et* $|b_{2n}| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

c.Déterminer les limites respectives des suites (u_{2n}) *et* (v_{2n}) .

* * * * * * * * * * *

Bon travail