

Lycée Secondaire H. Ghezze	<b>Devoir de Synthèse N° 1</b>	Pr : Mr Y.Boulila
Durée : 3 heures		Classe : 4emeMATHS Dec 2010

### EXERCICE N° I :( 6 points)

Pour chacune des questions suivantes sont proposées 4 assertions chacune pouvant être vraie ou fausse. Associer à chacune la bonne réponse sans donner de justification.

#### Question 1 :

On considère dans  $\mathbb{C}$ , l'équation (E)  $\bar{Z} = j \times Z^2$

Où  $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i \frac{2\pi}{3}}$   $Z_0$  est une solution de E, non nulle

- $\bar{Z}_0$  est une solution de (E)
- $|Z_0| = 1$
- $e^{-i \frac{2\pi}{9}}$  est une solution de (E)
- $\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)$  est une racine cubique de  $\bar{j}$

#### Question 2 :

On considère la fonction  $f: x \rightarrow x + \cos x$

- $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  et f strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- f est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .
- $f^{-1}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$  et  $(f^{-1})'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$

#### Question 3 :

ABC est un triangle équilatéral de sens direct, inscrit dans le cercle (C). Le point D est diamétralement opposé à A. Alors si

$$f = s_{(BD)} \circ s_{(DC)} \text{ et } g = s_{(CA)} \circ s_{(AB)}$$

- a)  $f$  est la rotation  $R\left(D, \frac{2\pi}{3}\right)$ .
- b)  $g$  est la translation de vecteur  $2\overrightarrow{BC}$
- c)  $f \circ g$  est une translation.
- d) Si  $A' = f(A)$  alors  $C$  est le milieu de  $[AA']$

### EXERCICE N°II :( 4 points)

Etant donné, dans le plan orienté, deux points  $O_1$  et  $O_2$ , on désigne par  $M_1$  le transformé d'un point quelconque  $M$  de ce plan par la rotation de centre de centre  $O_1$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et par  $M_2$  le transformé de  $M_1$  par la rotation de centre  $O_2$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ .

- 1/ Montrer que le milieu  $J$  du segment  $[MM_2]$  est un point fixe.
- 2/ Déterminer l'ensemble des points  $M$  pour les quels  $M, M_1,$  et  $M_2$  sont alignés.
- 3/ Déterminer l'ensemble des points  $M$  pour lesquels :  $\frac{MM_1}{M_1M_2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- 4/ On pose  $f = R_2 \circ R_1$  et  $g = f \circ s_{(O_1, O_2)}$

Caractériser l'application  $g$ .

### EXERCICE N°III:( 7 points)

Soit  $f$  défini par :  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$  ; I son ensemble de définition, (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1/ a) Déterminer I.
- b) Etudier la continuité de  $f$  sur I, puis la dérivabilité de  $f$  sur I.
- c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- d) Démontrer :  $\forall x \in I ; f(x) \geq x$
- e) Tracer (C) ainsi que  $\Delta : y=x$
- 2/ a) Démontrer que  $f$  réalise une bijection de  $[0,2[$  sur un intervalle  $J$  à préciser.
- b) Dresser le tableau de variation de  $f^{-1}$  sur  $J$ .

3/ a) Montrer pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ; l'équation  $f(x) = n$  admet une unique solution dans  $[0, 2[$  notée :  $x_n$

b) Déterminer  $x_0$  et  $x_1$

c) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  ,  $x_n < x_{n+1}$

d) En déduire que  $(x_{n-1})$  converge et calculer sa limite.

4/ a) Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$  et calculer  $(f^{-1})' \left( \sqrt{\frac{1}{3}} \right)$

b) Déterminer  $f^{-1}$  et retrouver le résultat précédent.

c) Tracer la courbe de  $f^{-1}$  dans le même repère que  $f$ .

### EXERCICE N°IV:( 4 points)

On considère les nombres complexes  $Z_n$  ;  $(n \in \mathbb{N})$  ; définis par :

$$\begin{cases} Z_0 = e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ Z_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{6}} Z_n ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On désigne par  $M_n$  l'image de  $Z_n$  dans le plan Complexe muni d'un R.O.N. direct  $(o, \vec{u}, \vec{v})$ . (Unité 4 cm)

1/ Placer les points  $M_0, M_1, \dots, M_{11}$

2/ a) Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$  ; on a  $Z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{6}\right)}$

b) En déduire les points  $M_n$  confondus

3) Démontrer pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $Z_{n+6} + Z_n = 0$  et interpréter le résultat

4/a) Calculer sous forme exponentielle :  $\frac{Z_{n+8} - Z_n}{Z_{n+4} - Z_n}$

b) En déduire la nature du triangle  $M_n M_{n+4} M_{n+8}$