Lycée rue Fattouma Bourguiba Monastir	Devoir de synthèse n°:1 4 M
	MATHEMATIQUES
Mr Zemni – Mr Abbes	Le 6/12/2010 DUREE : 3 h

Exercice 1 : (3 points)

Dans chacune des questions suivantes une seule des trois propositions est correcte. L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre la réponse choisie .

1) Soit ABCD un carré de sens direct et $f = t_{\overrightarrow{AC}} o S_{(AB)}$. f est une :

   a. Rotation b. Symétrie orthogonale c. Symétrie glissante.

2) Soit f et g deux symétries glissantes d'axes perpendiculaires. L'application fog est :

   a. Une translation b. Une symétrie centrale c. Une symétrie glissante.

3) La transformation complexe de la rotation R de centre A d'affixe 1 + 2i et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est :

   a. $z \mapsto z' = iz + 1 + 2i$ b. $z \mapsto z' = iz - 1 - 2i$ c. $z \mapsto z' = iz + 3 + i$.

Exercice 2 : (5 points)

Dans le plan orienté , on considère un triangle ABC rectangle en B tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par O le milieu de [AC] et par J le milieu de [BC].

1) a. Montrer qu'il existe un seul déplacement R tel que : R(A) = O et R(B) = C.
   b. Montrer que R est une rotation puis construire son centre D.
   c. Donner la nature de ABOD. Justifier .
2) On désigne par R_C la rotation de centre C d'angle $\frac{\pi}{3}$, par R_B la rotation de centre B d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. On pose f = R_c o T o R_B .
   a. Déterminer f(B).
   b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.
3) Soit g = $T_{\overrightarrow{AB}} o S_O$.
   a. Caractériser g.
   b. On pose M' = $T_{\overrightarrow{AB}}(M)$ et M'' = $S_O(M)$ où M est un point quelconque du plan
      Montrer que J = M'*M''.
4) On désigne par I = O*A et K = A*B.
   Soit φ l'antidéplacement qui transforme B en A et A en O.
   a. Montrer que φ est une symétrie glissante puis déterminer ses éléments caractéristiques.
   b. Montrer que φ(O) = D.
   c. Soit E = φ(D) , montrer que E et B sont symétriques par rapport au point O.

Exercice 3 : (3 points)

Soit u ∈ Ê\{-i , i}.

1) Vérifier que : $((u + 2)i - 1)^2 = -(u^2 + 2(2 + i)u + 3 + 4i)$

2) Résoudre dans Ê l'équation d'inconnue z , $(u^2 + 1).z^2 + (1 - (2 + i)u)z + 1 + i = 0$.

3) Soient les nombres complexes $a = \frac{1+i}{u-i}$ et $b = \frac{1}{u+i}$ et f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' = az + b .

   a. Déterminer le nombre complexe u pour que f soit une translation que l'on caractérisera.

   b. On prend u = 1. Montrer que f est une rotation que l'on caractérisera.

Exercice 4 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur □ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a. Montrer que f est continue à en 0.

   b. Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=\frac{1}{2}$.

2) a. Montrer que pour tout x ∈ Ë*, $f'(x)= \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})}$.

   b. Dresser le tableau de variation de f et tracer C_f .

3) a. Montrer que f réalise une bijection de Ë sur]-1 , 1[.

   b. Construire la courbe C_{f-1} de la fonction f^{-1} dans le même repère (O,Å,Å) .

   c. Montrer que pour tout x ∈]-1 , 1[; $f\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right) = x$. Déterminer alors $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

4) Soit h la fonction définie sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ par : h(x) = f(tan x).

   a. Montrer que h est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et que $h'(x) = \dfrac{1-cox}{\sin^2 x}$.

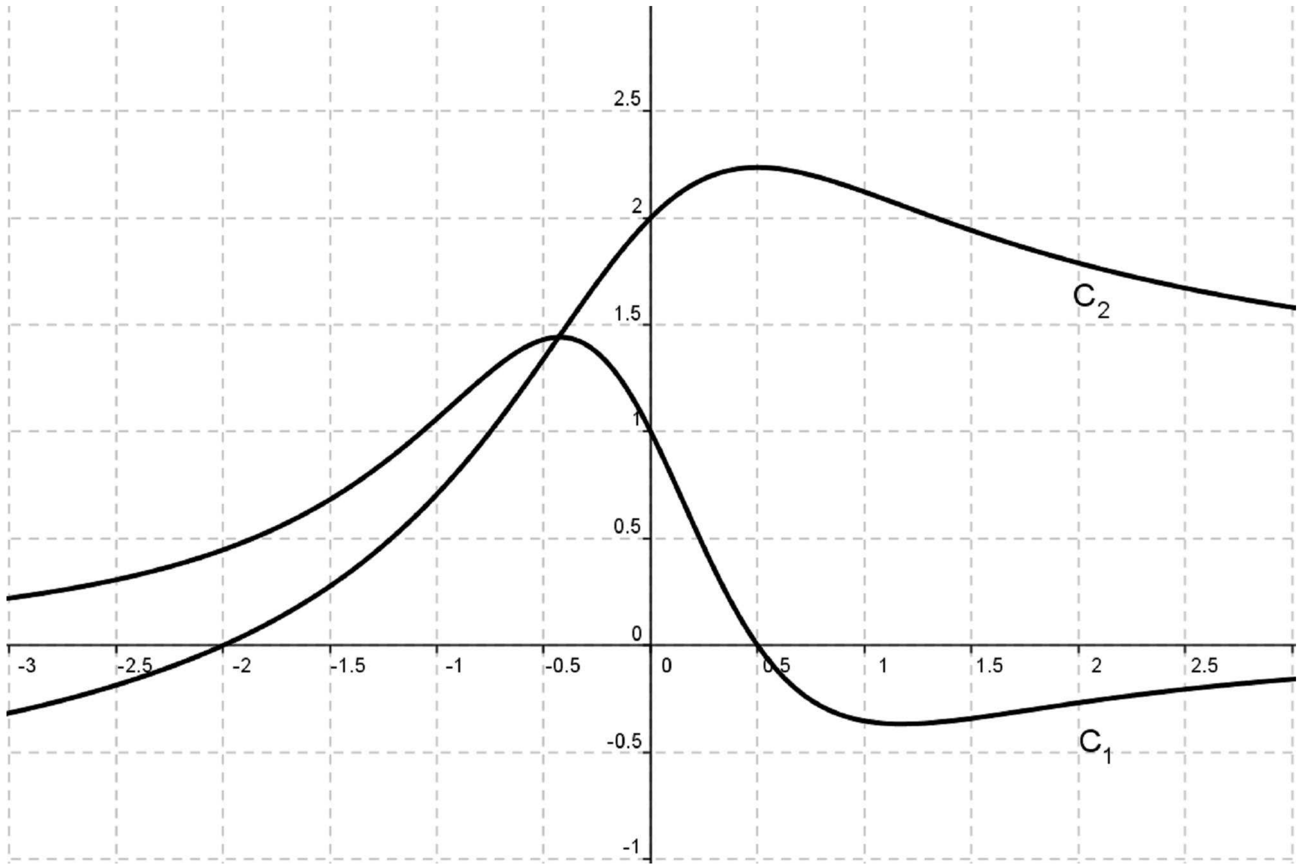
   b. En déduire que h est une bijection de $]0,\frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle K que l'on déterminera.

5) On donne $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[$, $h(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$.

   Montrer que h^{-1} est dérivable sur K et calculer $(h^{-1})'(x)$.

Exercice 5 : (4 points)

Dans le graphique ci-dessous C_1 et C_2 sont les courbes représentatives d'une fonction f définie sur [-3 , 3] et de sa fonction dérivée f'.



I/ 1) Justifier que C_2 est la courbe de f.

2) Déterminer la limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 2}{x}$ et $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{f(x) - \frac{9}{4}}{x - \frac{1}{2}}$.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $]\frac{3}{2}, 2[$ une solution unique α.

II/ Soit u la suite définie sur ¿ par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n);\ n \in ¿ \end{cases}$.

1) Montrer que pour tout n ∈ ¿, $\dfrac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.

2) Montrer que pour tout n ∈ ¿, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2} |u_n - \alpha|$.

3) En déduire que pour tout n ∈ ¿, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.