

Durée:3h

Exercice 1 :(4pts)

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$, la suite réelle définie par : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

- 1) Calculer u_1, u_2 et u_3 .
- 2) Montrer que (u_n) est croissante.
- 3) Montrer que pour tout $n \geq 1$: $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.
- 4) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 2 :(6pts)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

- 1) a) Vérifier que pour tout réel non nul x : $\sqrt{x^2+1} = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$.
- b) En déduire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 2) Montrer que f est décroissante sur \mathbb{R} .
- 3) Montrer que l'équation $f(x) = x$, admet dans \mathbb{R} une unique solution α . Vérifier que $\alpha \in]0,1[$.
- 4) Etudier la position relative de C_f par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

5) Soit h la fonction définie sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ par $h(x) = \begin{cases} f(\frac{1}{\cos x}) & ; \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 2 & ; \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

- a) Justifier que h est continue sur $]\frac{\pi}{2}, \pi]$.
- b) Etudier la continuité de h à droite en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3 :(5pts)

Soit $\theta \in [0, \pi]$.

- 1) a) Vérifier que $\cos^2 \theta + 2i \sin \theta = (1 + i \sin \theta)^2$.
- b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $i z^2 - 2z \cos \theta - 2 \sin \theta = 0$.

- 2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) on considère les points A, B, M et M' d'affixes respectives $-i, 2i, z = \sin \theta - i - i \cos \theta$ et $z' = -\sin \theta + i - i \cos \theta$.
- Calculer AM et donner une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$ en fonction de θ . En déduire l'ensemble des points M lorsque θ décrit l'intervalle $[0, \pi]$.
 - Vérifier que : $z' = -\bar{z} + 2i$. En déduire une construction du point M' à partir des points M et B.
 - Ecrire z et z' sous forme exponentielle.
 - Pour quelles valeurs de θ , les points O, M et M' sont ils alignés?

Exercice 4 : (5pts)

Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre O. On note I, J et K les milieux respectifs de [AB], [BC] et [CA].

Soit f une isométrie telle que $f(A) = B$ et $f(B) = C$.

- On suppose que f fixe un point du plan.
 - Justifier que f ne peut être une symétrie orthogonale.
 - En déduire que f est une rotation dont on précisera le centre et une mesure de son angle
- On suppose que f ne fixe aucun point du plan.
 - Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.
 - Construire le point $C' = f(C)$.
- Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $RoS_{(AJ)}$ à l'aide de deux méthodes :

- En déterminant les images des points O, B et C par $RoS_{(AJ)}$.
 - En décomposant R en deux symétries orthogonales d'axes convenablement choisis.
- 4) Soit T la translation de vecteur \overrightarrow{BJ} . On pose : $g = RoT$.
Montrer que g est une rotation dont on précisera le centre et une mesure de son angle.