| Lycées Houmet Souk 1 & 2<br>Profs: Loukil . M & Zayoud . A | Devoir de Synthèse N : 1<br>Durée : 3 Heures | 4 Mathématique<br>06 Décembre 2011 |
| --- | --- | --- |

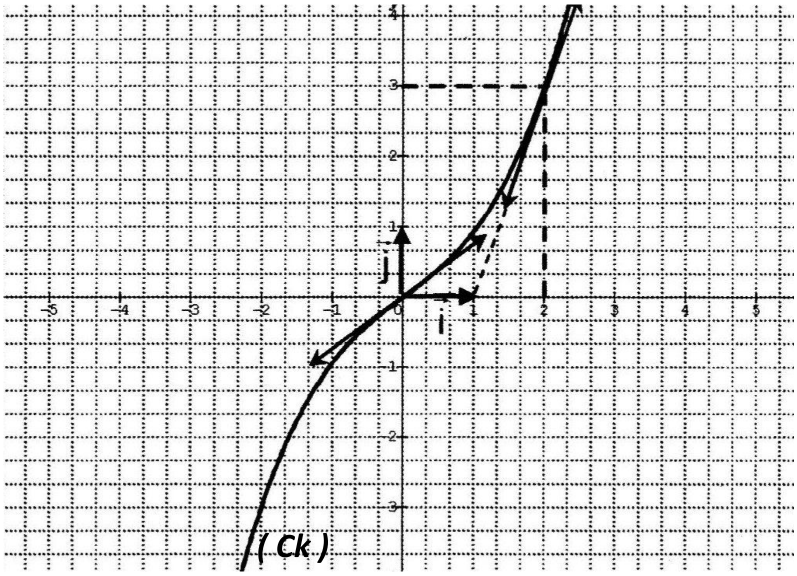
## EXERCICE N : 1 ( 3 points )

**Sans justification** , répondre par **vrai** ou **faux** .

**1 )** Si g est une fonction dérivable sur [ -1 ; 2 ] alors il existe un réel $\alpha \in ]-1;2[$ vérifiant :
$3g'(\alpha) - g(2) + g(-1) = 0$ .

**2 )** h est une fonction dérivable sur IR et pour tout $x \in IR$ , $|h'(x)| \leq \frac{1}{2}$ alors $|h(-3) - h(5)| < 5$

**3 )** Ci-contre sont tracées la courbe **( Ck )** d'une fonction **k** impaire , deux fois dérivable sur IR et strictement croissante ainsi que les tangentes à **( Ck )** aux points d'abscisses 0 et 2 .




**a )** **k ''** ne s'annule pas sur IR .

**b )** $(k^{-1})'(3) = 3$ .

**c )** la fonction réciproque $k^{-1}$ est impaire .

**d )** la fonction dérivée **k '** est impaire .

## EXERCICE N : 2 ( 4 points )

Dans le plan orienté dans le sens direct ,on considère un rectangle ABCD de centre O tel que AB = 2AD.

Soient I , J et F les points définies par : I = A* B ; J = D *C et C = B *F .

**1 ) a )** Montrer qu'il existe un unique déplacement $\varphi$ qui envoie A en C et I en J .
**b )** Caractériser $\varphi$ .

**2 )** Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [AB] et $(\mathscr{C}')$ le cercle de diamètre [CD] .
La droite (BD) recoupe $(\mathscr{C})$ en M et $(\mathscr{C}')$ en N , on pose $M' = S_{(IJ)}(M)$ .
**a )** Montre que : $N = \varphi(M)$ .
**b )** Déduire que les droites (M'N) et (BC) sont parallèles .

**3 ) a )** Montrer qu'il existe une unique isométrie $\psi$ vérifiant : $\psi(A) = C$ , $\psi(I) = J$ et $\psi(D) = F$ .
**b )** Montrer que $\psi$ est un antidéplacement .
**c )** Déterminer $\psi(B)$ puis donner la nature de $\psi$ et ses éléments caractéristiques .

**4 )** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie $f = \psi \circ S_{(AD)}$ .

## EXERCICE N : 3 ( 5 points )

**A )** Soit la fonction f définie sur $]-\infty ; \pi[$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+4} - x - 2 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \tan(\frac{x}{2}) & \text{si } 0 \le x < \pi \end{cases}$

**1 )** Montrer que f est continue en 0 .

**2 )** Etudier la dérivabilité de f en 0 .

**3 )** Soit g la restriction de f à $]-\infty ; 0]$ .

**a )** Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty ; 0]$ sur un intervalle J que l'on précisera .

**b )** Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$ **.**

**B )** Soit h la restriction de f à $[0 ; \pi[$ .

**1 )** Justifier que h admet une réciproque $h^{-1}$ définie sur J .

**2 )** Montrer que $h^{-1}$ est dérivable sur J et que $(h^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$ .

**C )** Pour tout $x \in ]0 ; +\infty[$ , on pose $\varphi(x) = h^{-1}(\sqrt{x}) + h^{-1}(\frac{1}{\sqrt{x}})$ .

**1 )** Montrer que $\varphi$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$ .

**2 )** Calculer $h^{-1}(1)$ puis déduire que pour tout $x \in ]0 ; +\infty[$ , $h^{-1}(\frac{1}{\sqrt{x}}) = \pi - h^{-1}(\sqrt{x})$ .

**D )** On considère les suites $(U_n)$ et $(V_n)$ définie sur IN*par :

$$U_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} h^{-1}(\sqrt{k}) \qquad \text{et} \qquad V_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} h^{-1}(\frac{1}{\sqrt{k}}) \quad .$$

**1 )** Montrer que pour tout $n \in IN^*$ : $h^{-1}(\sqrt{n}) \le U_n \le h^{-1}(\sqrt{2n})$ .

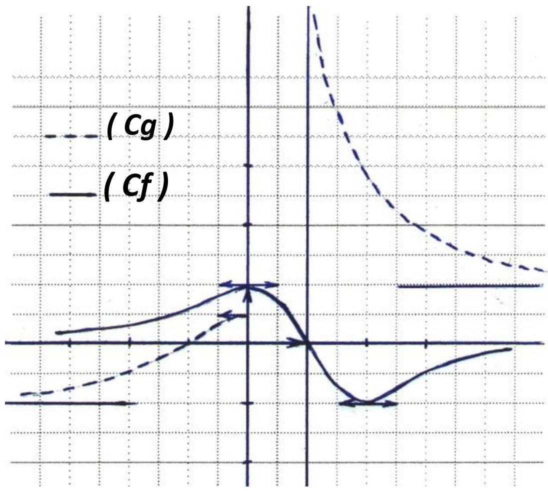
**2 )** En déduire que la suite $(U_n)$ est convergente et déterminer sa limite .

**3 ) a )** Exprimer $V_n$ en fonction de $U_n$ .

**b )** Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ .

## EXERCICE N : 4 ( 4 points )

On tracé ci-contre dans le plan muni d'un repère orthonormé ,
les courbes **( Cf )** et **( Cg)** de deux fonctions f et g . On pose : $\boldsymbol{h = g \circ f}$ .




**1 ) a )** Déterminer l'image de $]-\infty ; 1[$ par f .

**b )** Justifier que h est définie sur $[1 ; +\infty[$

**2 )** Résoudre graphiquement : $h(x) = 0$ .

**3 )** Calculer : $h(1)$ ; $h'(2)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ .

**4 )** Dresser le tableau de variation de h .

**5 )** Soit l'équation **( E )** : $h(x) = \frac{1}{n}$ , où $n \in IN$ et $n \ge 3$ .

**a )** Montrer que **( E )** admet exactement deux solutions $a_n$ et $b_n$ tels que : $a_n \in ]1 ; 2[$ et $b_n > 2$ .

**b )** Montrer que la suite $(a_n)$ est croissante et que $(b_n)$ est décroissante .

**c )** Montrer que $(a_n)$ et $(b_n)$ sont adjacentes .

## *EXERCICE N : 5* ( 4 points )

Soit l'équation **( $E_\theta$ )** : $Z^2 - e^{i\theta}\,[\,2+\sqrt{2}\,(-1+i)\,]\,Z + 2\sqrt{2}\,(-1+i)\,e^{i2\theta} = 0$ ; $\theta \in [\,0\,;\,\frac{\pi}{2}\,]$ .

**A ) 1 )** Vérifier que $Z_0 = 2\,e^{i\theta}$ est une solution de **( $E_\theta$ )** .

**2 )** Déduire alors l'autre solution $Z_1$ de l'équation **( $E_\theta$ )** .

**B )** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ .

On donne les points M , M' e t M'' d'affixes respectives :

$$Z = 2\,e^{i\theta} \quad , \quad Z' = \sqrt{2}\,(-1+i)\,e^{i\theta} \quad \text{et} \quad Z'' = i + 4\,e^{i(\theta+\frac{3\pi}{4})} \ .$$

**1 )** Montrer que M' est l'image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{4}$ .

**2 )** Montrer que M'' est l'image de M ' par une homothétie h que l'on caractérisera .

**3 ) Déduire** l'ensemble **( $\Gamma$ )** des points M'' lorsque $\theta$ varie dans $[\,0\,;\,\frac{\pi}{2}\,]$ .

**C )** Soit l'équation **( $E'_\theta$ )**: $(\sqrt{2}\,Z - 1)^3 = (-2+2i)\,e^{i\theta}Z^3$ .

**1 )** Déterminer les racines cubiques du nombres complexe $a = (-2+2i)\,e^{i\theta}$.

**2 )** Soit $\alpha \in \,]\,0\,;\,2\pi\,[$ . Montrer que $\dfrac{\sqrt{2}\,Z-1}{Z} = \sqrt{2}\,e^{i\alpha} \Leftrightarrow Z = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(1 + i\,\mathrm{cotg}\,\dfrac{\alpha}{2}\right)$ .

**3 )** Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation **( $E'_\theta$ )** . ( Donner les solutions sous la forme cartésienne )