Lycée secondaire : ALI BOURGUIBA KALAA KBIRA		Année scolaire : 2011 - 2012
Prof : MAATALLAH	Devoir de synthèse n° 1	Classes : 4 M
Epreuve : Mathématiques	Date : 06 - 12 - 2011	Durée : 3 heure

Exercice n°1 : (2 points)

Indiquer si la proposition est vraie ou fausse . La justification est non demandée

1) Soit $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[5]{(2+3x^4)^4}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = \dfrac{4(2+3x^4)^3}{5\sqrt[5]{(2+3x^4)^{12}}}$

2) Soit $f : P \to P$ et $g : P \to P$

$M(z) \longmapsto M'(z')$ tel que $z' = i\bar{z}$ $\qquad$ $M(z) \longmapsto M'(z')$ tel que $z' = -i\bar{z}$

Alors $g \circ f$ est l'identité du plan .

3) Soit f une fonction continue de $[0 , 1]$ dans $[0 , 1]$. Alors $f(x) = x$ admet au moins une solution .

Exercice n° 2 : (5 points)

Le plan P est orienté dans le sens direct . On considère un triangle ABC rectangle en C , inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et tel que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ .On désigne par I le milieu de $[BC]$, D le symétrique de C par rapport à (AB) et E le symétrique de O par rapport à I .

1) Montrer que $[DE]$ est un diamètre de $(\mathcal{C})$.

2) Soit $h = S_{(BC)} \circ S_{(AB)}$ et $\psi = S_{(ED)} \circ S_{(OA)}$.

a) Caractériser chacune des isométries h, ψ et $\psi \circ h^{-1}$.

b) Déterminer l'image de la droite (BD) par h .

c) Soit M un point du plan n'appartenant pas à la droite (BD) . On pose $M' = h(M)$ et $M'' = \psi(M)$. Montrer que $BM'CM''$ est un parallélogramme .

3) Soit f une isométrie telle que : $f(E) = A$ et $f(C) = D$.

a) Soit g l'isométrie telle que : $f = t_{\overrightarrow{EA}} \circ g$. Montrer que : $g = R_{(E, -\frac{2\pi}{3})}$ ou $g = S_{(ED)}$.

b) On suppose que $g = R_{(E, -\frac{2\pi}{3})}$. Déterminer les droites Δ et Δ' telles que :

$R_{(E, -\frac{2\pi}{3})} = S_{(EB)} \circ S_{\Delta}$ et $t_{\overrightarrow{EA}} = S_{\Delta'} \circ S_{(EB)}$. Caractériser f .

Exercice n° 3 : (5 points)

Soit θ un réel de l'intervalle $[0, \pi]$ et (E) l'équation dans $\mathbb{C}$: $(1 - i)z^2 - 2(\sin\theta + \cos\theta)z + 1 + i = 0$. On note z_1 et z_2 les solutions de (E) avec $\mathrm{Im}(z_1) \geq 0$ pour tout réel θ de $[0, \pi]$.

1) Sans calculer z_1 et z_2 trouver une relation entre les modules et des arguments de z_1 et z_2

2) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) . Ecrire sous forme exponentielle z_1 et z_2 .

b) Préciser la valeur de θ pour laquelle $z_1 = z_2$. Calculer dans ce cas $(z_1)^{2012}$.

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par M_1 , M_2 les points d'affixes respectives $z_1 = e^{i\theta}$ et $z_2 = ie^{-i\theta}$

a) Trouver l'ensemble $\mathcal{C}_1$ décrit par M_1 et l'ensemble $\mathcal{C}_2$ décrit par M_2 lorsque θ varie dans $[0, \pi]$. Vérifier que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice .

b) Déterminer les réels $\theta \in [0, \pi]$ pour les quels OM_1M_2 soit un triangle équilatéral .

c) Déterminer θ pour la quelle M_2 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Exercice n° 4 : *(8 points)*

Soit f une fonction définie sur $]-\sqrt{6},\sqrt{6}[$. On a représentée dans un R.O.N une partie de (C_f) sur $]0,\sqrt{6}[$ *(voir* ***Document 1*** *page 3)* . $\forall x \in]0,\sqrt{6}[$, $f(x) = h(x) - P(x) - 3$ où $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

Soit h une fonction définie sur $]0,\sqrt{6}[$ et dérivable sur $]0,\sqrt{6}[$ et est représentée dans le même repère par (C_h) . Δ est la tangente à (C_h) au point $\mathcal{A}$. On admet que $\forall x \in [0,1]$, $h(x) = 0$.

1) a) Montrer que $\forall x \in]0,\sqrt{6}[: P(x) = x^2 - 5$. Déduire $f(x)$, $\forall x \in [0,1]$.

b) Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que l'équation : $f(x) = h(x)$ admet dans $]1,\sqrt{5}[$ une solution unique α . Calculer α et montrer que $f(\alpha) > 0$.

c) f est une primitive d'une fonction impaire g sur $]-\sqrt{6},\sqrt{6}[$. Etudier la parité de f et calculer $f(-\sqrt{2})$

2) On suppose que $\forall x \in]1,\sqrt{6}[$, $h(x) = u \circ P(x)$.

a) Montrer que $u'(0) = 1$. Etudier la dérivabilité de u à gauche en 1 .

b) Dresser le tableau de variation de u . Montrer que u est bijective .

c) Déterminer une équation de la tangente T à $(C_{u^{-1}})$ au point d'abscisse 1 . u^{-1} est-elle dérivable en 2 ?

d) Construire (C_u) et $(C_{u^{-1}})$ dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3) Soit la fonction Q définie par $\forall$

$$Q(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4}\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-5}} & \text{si } x < -\sqrt{6} \\ f(x) & \text{si } x \in]-\sqrt{6},\sqrt{6}[\\ \dfrac{1}{4}\sqrt{x^2-6} - \dfrac{9}{4} - u^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > \sqrt{6} \end{cases}$$

Soit (Γ) la courbe représentative de Q dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On donne les variations de Q sur $]-\infty,-\sqrt{6}[$ et $]\sqrt{6},+\infty[$ *(voir* ***Document 2*** *page 3)*

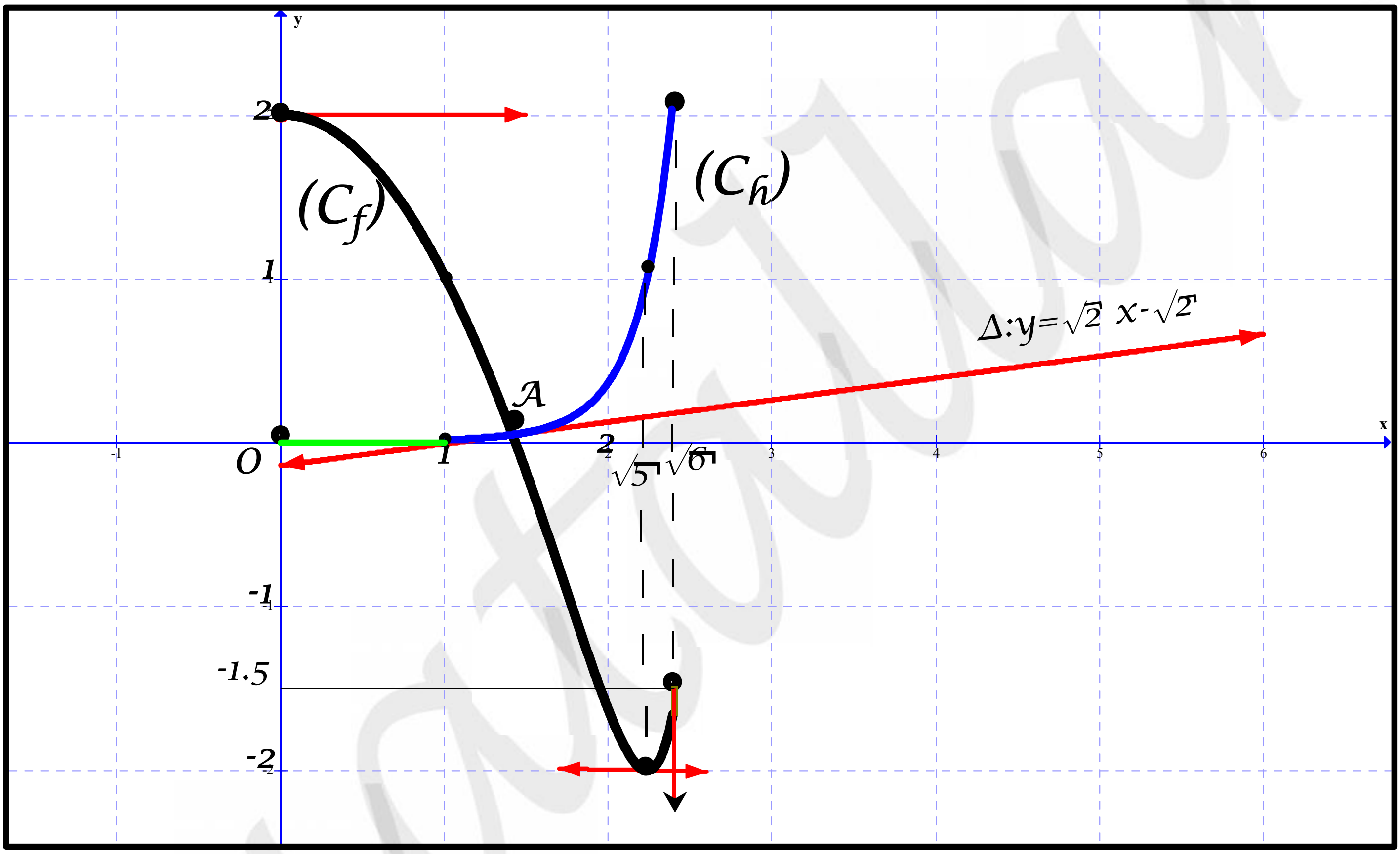
a) Résoudre dans $]-\infty,-\sqrt{6}[$: $2Q(x) + 3 = 0$. Déduire que : $Q'(x) = 0$ admet dans $]-\infty,-\sqrt{6}[$ au moins une solution β .

b) Etudier la continuité de Q en $(-\sqrt{6})$ et en $\sqrt{6}$. Achever l'étude de Q et la représenter .

Bon travail

Il sera tenu compte de la rédaction et la bonne présentation de la copie .

Document 1



Document 2 :

Variations sur $]-\infty, -\sqrt{6}]$

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$
$Q(x)$	↗		↘

Variation sur $[\sqrt{6}, +\infty[$

x	$\sqrt{6}$	$+\infty$
$Q(x)$	$-\frac{3}{2}$	↗