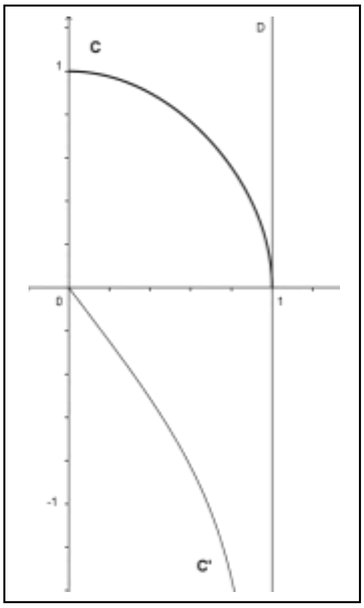
Lycée cité El Amel Gabés | Devoir de synthèse n°1 | 4ème Maths 2
Durée : 3h | Le 06/12/2011 | Pr : Marzouk Ali

Exercice N°1 : (3 points)



Dans la figure ci-joindre on a donné la courbe (C) d'une fonction f définie sur $[0,1]$ et (C') celle de sa fonction dérivée f'.

$D : x = 1$ est une asymptote à (C')

On considère les points A et B de (C) d'abscisses respectives 0 et 1

1) Répondre par **vrai** ou **faux**, en justifiant les réponses à l'aide du graphique.

a) La demi-tangente à (C) en A est horizontale

b) La fonction f est dérivable à gauche en 1

c) Il existe une unique tangente à (C) parallèle à (AB).

d) L'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ où n est un entier naturel non nul, admet une unique solution α_n dans $[0,1[$.

2) On définit la suite (α_n) sur $\mathbb{N}^*$ par $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$

a) Etudier la monotonie de la suite (α_n).

b) Déterminer la limite de la suite (α_n)

Exercice N°2 : (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$, soit m un paramètre complexe

On donne l'application $f_m : P \to P$; $M(z) \mapsto M'(z' = (im-1)z + m)$

1)a) Déterminer m pour que f_m soit une translation. Donner dans ce cas son vecteur.

b) Montrer que : f_m est une rotation $\Leftrightarrow$ $m = e^{i\theta} - i$ et $m \neq -2i$ où θ est un réel

Caractériser f_m lorsque $\theta = 0$

2) Dans cette question on pose $z' = iz + 1 - i$

a) Déterminer les racines cubiques de -1

b) Montrer que : $z'^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^3 - 3(1+i)z^2 + 6iz + 2 - i = 0$

c) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$: $z^3 - 3(1+i)z^2 + 6iz + 2 - i = 0$

Exercice N°3 : (5 points)

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$,

On pose $I = C * D, J = K * B, H = I * J$ et $K = S_B(C)$

1)a) Montrer que qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(D) = B$ et $f(I) = J$

b) Caractériser f et en déduire la nature du triangle AIJ

2)a) Vérifier que le quadrilatère $IOJB$ est un parallélogramme, en déduire que $H \in (BD)$.

b) Soit φ l'antidéplacement défini par $\varphi(D) = B$ et $\varphi(I) = J$

Montrer que φ est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.

3) On désigne par R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $g = Rot_{\overrightarrow{DB}} o S_{(DB)}$

Déterminer $g(D)$ et $g(I)$ caractériser g $h=S_{\Delta}ot_{2\overrightarrow{CA}}$

4)a) Montrer que : $f=S_{(AB)}oS_{(AC)}$ en déduire que $f(C)=K$

b)Déterminer et construire $\Delta=f((BC))$.

c)Caractériser l'application $h=S_{\Delta}ot_{2\overrightarrow{CA}}$

Problème : (8 points)

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

on désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

I) 1)a) Montrer que pour tout x appartient à $[0,+\infty[$ on a : $f'(x)=\dfrac{-x}{(\sqrt{1+x^2})^3}$

b) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$sur $]1,2]$

2) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$ et que : $\dfrac{3}{2}\prec\alpha\prec 2$

3)a) Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ dans le même repère .

b) Montrer que pour tout x appartient à $]1,2]$on a : $f^{-1}(x)=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$

4) Soit la suite U définie par : $U_0=1$ et $U_{n+1}=f(U_n)$

a) Montrer que $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$: $1\le U_n\le 2$

b) Montrer que pour tout $x\in[1,2]$on a : $|f'(x)|\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

c)Montrer que $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$: $|U_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}|U_n-\alpha|$ .Calculer la limite de la suite U .

II) Soit la fonction g définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$par $\begin{cases} g(x)=f(\tan(x))....si..x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\\ g(\dfrac{\pi}{2})=1 \end{cases}$

1)a)Montrer que g est continue à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$.

b) Montrer que pour tout x appartient à $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$on a : $g(x)=1+\cos(x)$

2)a)Montrer que g réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]sur[1,2]$.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[1,2[$ et que pour tout x appartient à $[1,2[$on a :

$(g^{-1})'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{2x-x^2}}$