L.S.H-GHZI MATHS

4^E-MATHS DS NI

EXERCICE-N-1(7points)

(A)

N°	Questions	Réponses			
		a	b	c	d
1	Si $\frac{\pi}{6}$ est un argument de z, alors un argument de $\frac{i}{\bar{z}^2}$ est:	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
2	Si $z=-\sqrt{3}+e^{i\frac{\pi}{6}}$, alors la forme exponentielle de z est:	$e^{\frac{5\pi}{6}i}$	$e^{\frac{7\pi}{6}i}$	$\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i}$	$e^{-\frac{5\pi}{6}i}$

(B) 1. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, strictement croissante sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.
Si l'on sait de plus que $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$, alors :

a) L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0, 1[$.

b) L'équation $f'(x)=-2$ admet au moins une solution dans $]0, 1[$.

On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}^*$ des nombres complexes non nuls, l'équation (E) :
$z^3=\left(-2-2i\sqrt{3}\right)\bar{z}$.

(C) 1. Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe $u=-2-2i\sqrt{3}$.

2. On pose $z=re^{i\alpha}$ où r est un réel strictement positif et α un réel de l'intervalle $[0,2\pi[$.

a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $r^2e^{i4\alpha}=4e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

b) En déduire que l'équation (E) admet, dans $\mathbb{C}^*$, quatre solutions que l'on donnera sous forme exponentielle.

EXERCICE-N-2(5.5points)

Dans le plan orienté on considère un rectangle $ABCD$ de centre O tel que $AB=2BC$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}})\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Soit $I=A*B$ et $J=C*D$.

0,5 1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que $f(A)=C$ et $f(I)=J$.

0,5 b) Prouver que $f(B)=D$.

0,5 c) Montrer que f est une symétrie glissante.

2) Soit $E=f(C)$.

L.S.H-GHZ|DEVOIR SYNTHESEN1|4M

MATHEMATIQUES

0,5 a) Montrer que $(\overrightarrow{DC}\ ,\widehat{\ }\ \overrightarrow{DE}) \equiv \frac{\pi}{2}\quad [2\pi]$.

0,5 b) Prouver que $D = A * E$.

0,75 c) Soit $F = f(D)$. Montrer que $ABFE$ est un carré direct.

3) Montrer que $f o S_{(AB)}$ est une symétrie centrale dont on précisera le centre. En déduire la forme réduite de f.

1 4)Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$ ' les cercles de diamètres respectifs $[AB]$ et $[CD]$. (AC) recoupe $\mathscr{C}$ en M et (CE) recoupe $\mathscr{C}$ ' en M'. On pose $N = S_{(OI)}(M')$. Montrer que (MN) et (AD) sont parallèles.

EXERCICE-N-3(5.5points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1+\sin(\pi x)$.

0,75 1. Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ sur $[0, 2]$.

0,5 2. a) Montrer que f^{-1}, la fonction réciproque de f, est dérivable sur $]0, 2[$.

0,75 b) Déterminer pour tout x de $]0, 2[$, $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$. 1

0,75 3. On pose pour tout x de $[0, 2]$, $g(x) = f^{-1}(2-x) + f^{-1}(x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]0, 2[$ puis calculer, pour tout x de $]0, 2[$, $g'(x)$. 1

0,75 b) En déduire que pour tout x de $[0, 2]$, $f^{-1}(2-x) = -f^{-1}(x)$.

4. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)$.

0,75 a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\frac{n+1}{n}f^{-1}\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \le u_n \le \frac{n+1}{n}f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

0,75 b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(1-\frac{1}{n+k}\right)$. 1