Lycée de Mornag	DEVOIR DE SYNTHESE N°1	Le :06/12/2011
Mr :Oueslati Mongi		$4^{\text{éme}}$ Math Durée : 3 H

Exercice n°1(3 points)

1) Soit f une fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$; f(1)=1 ; f'(1)=-3 ; g une fonction définie sur $]0\,;2[$ tel que : $g(x)=\sqrt{f(x)}+x$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$ est égale à

a) $\dfrac{-1}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $-\dfrac{3}{2}$ d) $\dfrac{3}{2}$

2) Soit ABCD un carré de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}})\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$; $S_c(B)=E$; $f=R_{(D;\frac{\pi}{2})}\circ S_{(CD)}$

alors f est égale à :

a) $S_{(DE)}$ b) $S_{(AC)}$ c) $t_{\overrightarrow{CE}}$

3) Soit ABCD un carré de centre O tel que : $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}})\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$; I = A *B ; $t_{\overrightarrow{BD}}\circ S_{(BC)}=$

a) $t_{\overrightarrow{CD}}\circ S_{(OI)}$ b) $t_{\overrightarrow{BC}}\circ S_{(OI)}$ c) $S_{(BC)}$

Exercice n°2(8 points)

Soit f une fonction définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$

1)a) Montrer que por tout réel x on a $f'(x)=\dfrac{1}{(1+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}$

b)Montrer que f réalise une bijection de IR sur J que l'on présisera . Soit f^{-1} la réciproque de f

2) a) Dresser le tableau des variations de f et préciser les branches infinies

b)Ecriver l'équation de la tangente T à la courbe representative C_f au point d'abssice 0

puis vérifier que si $x\geq 0$ on a $f(x)\leq\dfrac{1}{2}x$

et si $x\leq 0$, on a $f(x)\geq\dfrac{1}{2}x$

3)Construire les courbes representatives C_f et $C_{f^{-1}}$, dans un repére orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

4) Montrer que $f^{-1}(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}$ pour x de J

5) Soit u_n une suite définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$

a) Montrer que $u_n \in [0;1]$ pour tout entier naturel n

b) Montrer que u_n est décroissante ; puis u_n est convergente et determiner sa limite

c) Montrer que $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$ pour tout n de IN puis déduire que $u_n \leq \frac{1}{2^n}$ $\forall \in IN$ .Retrouver la limite de u_n

6) Soit v_n une suite définie sur IN^* par : $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{1}{k})$ .Montrer que $f(\frac{1}{n^2}) \leq v_n \leq f(\frac{1}{n})$ puis déduire la limite de v_n

Exercice n°3 (4 points)

Soit $\alpha \in C \setminus \{i\}$ et l'équation (E_α) :$(\alpha-i)z^2-[2(\alpha-i)+i\alpha]z + 2i\alpha=0$

1) a) Trouver les solutions de (E_0) pour $\alpha=0$

b) En déduire que pour tout α de $C\setminus\{ i \}$;(E_α) possede une solution réelle (On pourra inspirer une idée de 1)a))

c) Montrer que l'autre solution de (E_α) est $z_\alpha=\frac{i\alpha}{\alpha - i}$

2) Pour $\alpha = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0;\frac{\pi}{2}[$

a) Montrer que $z_\alpha = \frac{1}{2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})} e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4})}$

b)Déterminer θ tel que OAB triangle isocele en O . avec A et B d'affixes respectives z_α et i

Exercice n°4 (5points)

Soit ABC un triangle rectangle et isocel en A tel que : $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et O= B*C ;I=A*C et J=A*B

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A)=O et f(O)=C

b) Déterminer l'angle de f

c) Déterminer fof(A) déduire que I est le centre de f

2) Soient $R_1 = r_{(O;\frac{\pi}{2})}$ et $R_2 = r_{(A;\frac{\pi}{2})}$ deux rotations

a) Montrer que $R_2=S_{(OA)} \circ S_{(AB)}$ et que R_1 (A)=B

b) Déterminer Δ tel que $R_1=S_\Delta \circ S_{(OA)}$

c) Déterminer $R_1 \circ R_2$

3)On considére $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ un repére orthonormé direct du plan complexe

Soit $f : M(z) \longrightarrow M'(z')$ tel que $z'=\bar{z}-i$

a) Montrer que est la composée du translation T et d'une symetrie orthogonale S tel que T :M(z) associe M'(z') avec z'=z+i et D : M(z) associe M'(z') avec z' =z

b) Montrer que f est une symetrie orthogonale dont on precisera l'axe