L. Regueb	**Mathématiques**	Classe : $4^{ème}$M
Prof : Salhi Noureddine	Devoir de Synthèse №1	Le : 06/12/2011 Durée : 3h

Exercice1(3pts) *Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte . Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.*

1) Soit f la composée de trois symétries orthogonales d'axes strictement parallèles alors :

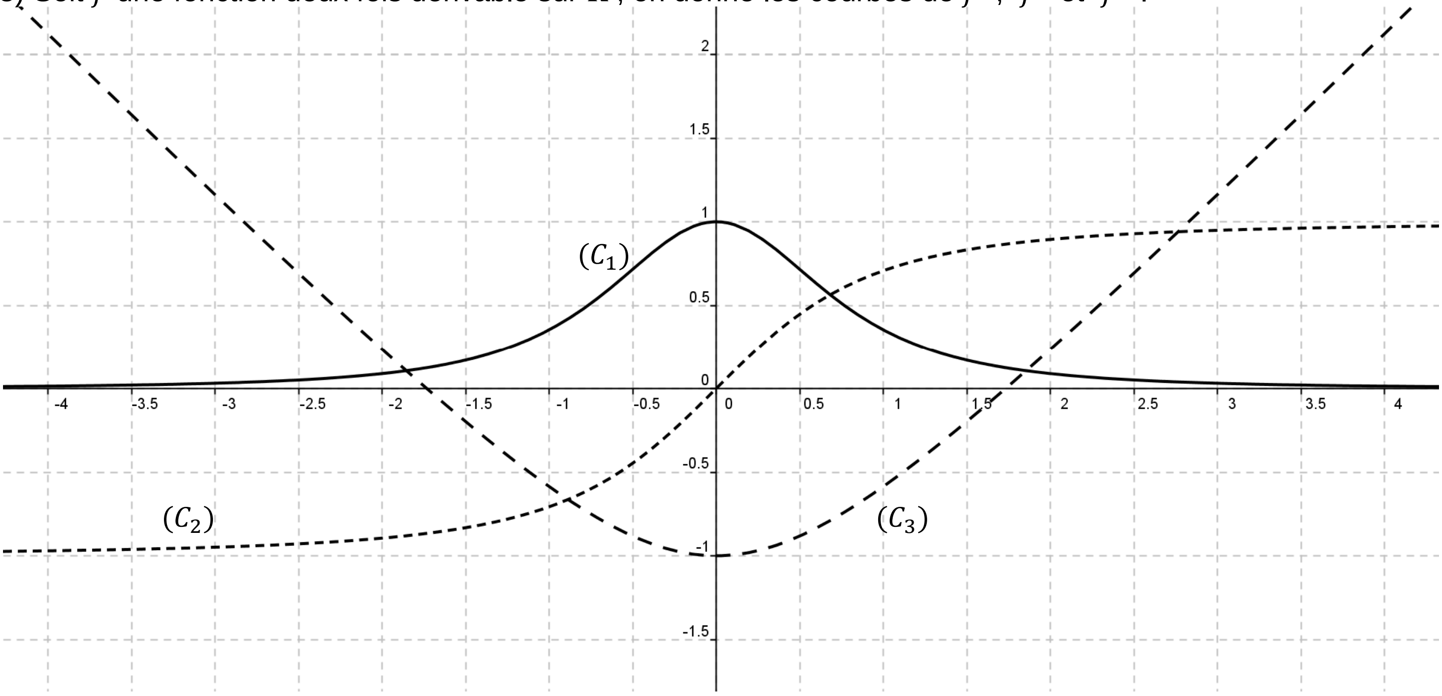
a) f est une symétrie orthogonale b) f est une symétrie glissante c) $f^{-1} \neq f$

2) Soit f une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = f(x) + c$, $x \in \mathbb{R}$, où c est une constante réelle.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors :

a) $g^{-1}(x) = f^{-1}(x) + c$ b) $g^{-1}(x) = f^{-1}(x + c)$ c) $g^{-1}(x) = f^{-1}(x - c)$

3) Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on donne les courbes de f , f' et f'' .



a) La courbe de f est (C_1) b) La courbe de f est (C_2) c) La courbe de f est (C_3)

Exercice2(5pts)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation : $E_d : z^3 + (3 - d^2)z + 2i(1 + d^2) = 0$

où d est un nombre complexe donné de module 2.

1)a) Vérifier que $2i$ est une solution de E_d .

b) Résoudre alors l'équation E_d .

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points :

A , B , M et N d'affixes respectives : $2i$, $-i$, $-i + d$ et $-i - d$.

a) Calculer MN et déterminer le milieu de [MN].

b) En déduire que lorsque d varie , les points M et N appartiennent à un cercle fixe que l'on précisera .

c) Dans le cas où AMN est un triangle , montrer que O est le centre de gravité du triangle AMN .

d) En déduire les valeurs de d pour lesquelles le triangle AMN est isocèle de sommet principal A .

Exercice3(6pts)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et on désigne par O le milieu du segment $[BC]$, faire une figure ,que l'on complètera au fur et à mesure .

1) Montrer que le triangle OCA est équilatéral.

2)a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie O sur A et B sur C .

b) Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle. Construire son centre I sur la figure .

c) En calculant $\left(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IO}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IA}}\right)$, montrer que I appartient au segment $[AB]$.

3) Soit R la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f \circ R$.

b) Soit C' l'image de C par f. Déterminer $(f \circ R)(C)$. En déduire que A est le milieu du segment $[CC']$.

4)a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g tel que $g(O) = A$ et $g(B) = C$.

b) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur .

c) Montrer que $g(C) = C'$.

Exercice4(6pts)

On considère la fonction f définie sur $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \sqrt{\sin(2x)}$ et on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 .Interpréter graphiquement le résultat obtenu .

2)a) Montrer que f est dérivable sur $\left]0\ ,\frac{\pi}{4}\right]$ et calculer $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) En déduire que f réalise une bijection de $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{4}\right]$ sur $[0\ ,\ 1]$.

3)a) Calculer $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ puis montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer $(f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0\ ,1[$ et que pour tout $x \in]0\ ,1[$; $(f^{-1})'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$.

c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 0 .

4)a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul , l'équation : $f(x) = \frac{1}{n}$ admet , dans $\left]0\ ,\frac{\pi}{4}\right]$, une solution unique a_n . Calculer a_1 .

b) Montrer que la suite (a_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente .

c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.