4 année Mathématiques

Mathématiques

Devoir de synthèse n° 1

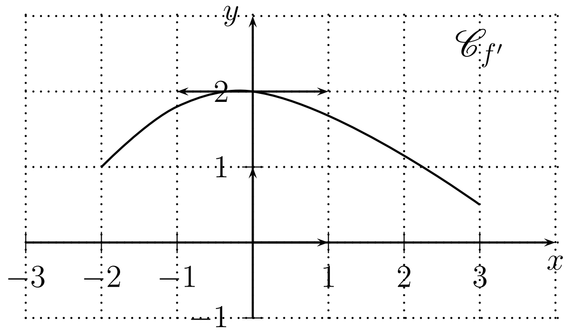
Durée 3 h

## Exercice 1 (3 points)

Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[-2; 3]$. On donne ci contre la représentation graphique de la fonction dérivée $f'$ de $f$.

Répondre par vrai ou faux sans justifier la réponse.

1. $f(-2) \geq f(3)$
2. $f$ est une bijection de $[-2; 3]$ sur $f([-2; 3])$
3. La courbe $C_f$ admet une seule tangente parallèle à l'axe des abscisses.
4. $f$ admet un extremum local en 0
5. Le point $A(0; f(0))$ est un point d'inflexion de la courbe $C_f$
6. $|f(3) - f(-2)| \leq 10$




## Exercice 2 (3 points)

Soit l'équation $(E): 2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2 = 0$

1. Montrer que si $z_0$ une solution dans $\mathbb{C}$ de $(E)$ alors $\overline{z_0}$ et $\dfrac{1}{z_0}$ sont aussi des solutions $(E)$
2. (a) Donner la forme exponentielle du nombre complexe $u = 1 + i$.
   (b) Montrer que $u$ est une solution de $(E)$ dans $\mathbb{C}$.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$.

## Exercice 3 (4 points)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \sin x$.

1. Montrer que pour tout réel $x$, $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$
2. Montrer que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Soit $g$ la réciproque de $f$. Étudier la dérivabilité de $g$ sur $]-\pi, \pi[$.
4. Soit $n$ un entier naturel.
   (a) Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique $\alpha_n$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $n - 1 \leq \alpha_n \leq n + 1$
   (c) Calculer $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \alpha_n$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{\alpha_n}{n}$

## Exercice 4 (5 points)

Dans le plan orienté on donne un triangle rectangle isocèle tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, on désigne par $\zeta$ le cercle circonscrit de se triangle de centre $O$.

Soit $D$ le point du segment $[BC]$ tel que $BD = AB$ .

On prendra $AB = 3$ l'unité de mesure étant le centimètre.

1. Montrer qu'il existe une seule rotation $r$ qui envoie $A$ en $B$ et $C$ en $D$
2. On note $\Omega$ le centre de $r$.
   (a) Calculer une mesure de chacun des angles $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ et $(\overrightarrow{D\Omega}, \overrightarrow{DC})$.
   (b) Déduire que que $\Omega$, $A$ et $D$ sont alignés.
   (c) Montrer que $\Omega$ appartient à $\zeta$. Construire $\Omega$.
3. Soit le point $O' = r(O)$, Montrer que $O'$ est équidistant des points $\Omega, D$ et $B$

## Exercice 5 (5 points)

Soit $f$ la fonction représentée dans la figure 1 (voir feuille annexe) par le quart de cercle de centre $O$ et de rayon 1.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
2. Pour tout $t \in [0, 1]$, on note $S(t)$ le domaine du plan limité par la courbe de $f$ et les droites d'équations $x = 0$, $x = t$ et $y = 0$ et on désigne par $\mathscr{A}(t)$ son aire.
   (a) Calculer $\mathscr{A}(1)$.
   (b) Soit $h$ un réel strictement positif tel que $t$ et $t + h$ appartiennent à $[0, 1]$.
   Hachurée dans la figure 1 donnée, $S(t + h) - S(t)$.
   A l'aide des considérations d'aires montrer que :
   $$hf(t + h) \leq \mathscr{A}(t + h) - \mathscr{A}(t) \leq hf(t)$$
   (c) Montrer que la fonction $t \mapsto \mathscr{A}(t)$ est dérivable sur $[0, 1]$ puis que pour tout $t \in [0, 1]$, $\mathscr{A}'(t) = f(t)$.
3. Soit $F$ la fonction définie sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ par :
   $$F(x) = \mathscr{A}(\cos x) + \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$$
   (a) Montrer que $F$ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ puis calculer $F'(x)$.
   (b) Calculer $F(0)$ puis déduire l'expression de $\mathscr{A}(\cos x)$ en fonction de $x$.
   (c) Calculer l'aire de du plan colorée donnée dans la figure 2.

# Feuille annexe

Nom.................................... Prénom........................................ N....

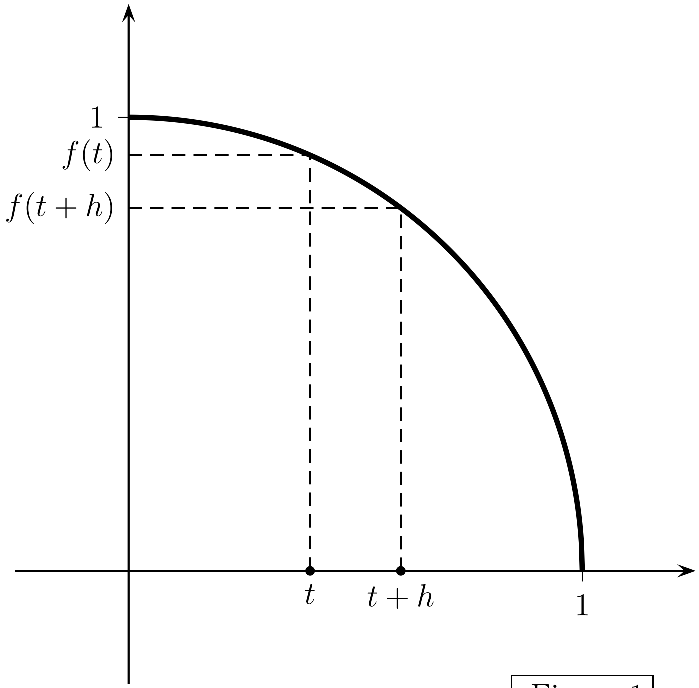



Figure 1

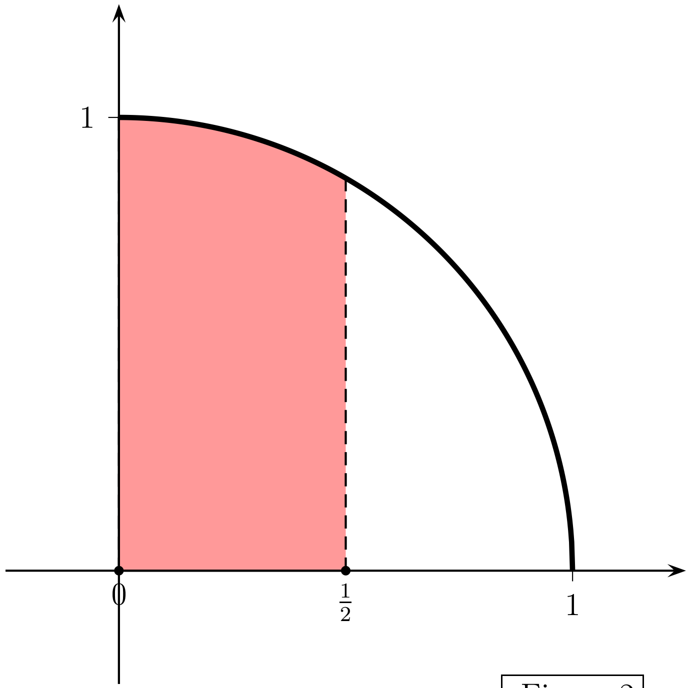



Figure 2