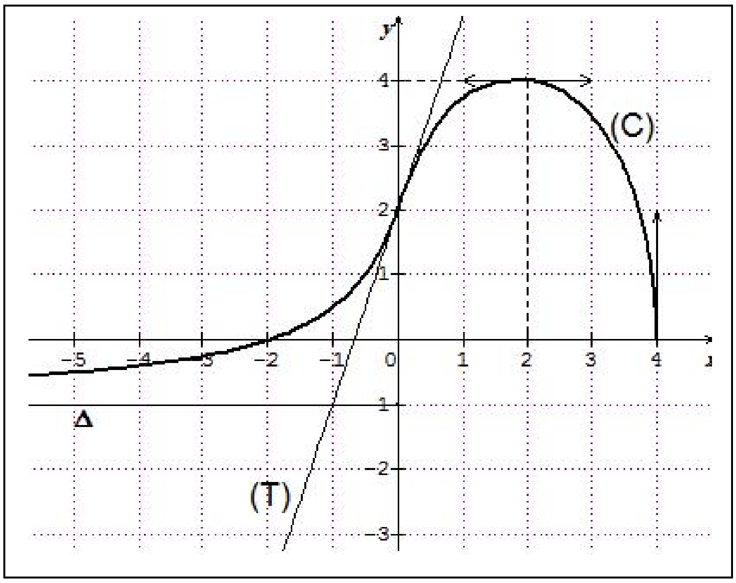
Lycée Boulbaba Gabés	Devoir de synthèse n°1	M^{rs} : BOURAOUI+AZAIEZ+NAGBI
Classe: 4 M	Durée : 3^H	A S : 2012- 2013

Exercice n°1 (3pts)



On donne ci-contre la représentation graphique (C) d'une fonction f définie sur $]-\infty\ ,\ 4]$. La droite $\Delta : y = -1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.
La tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 passe par le point $A(-1, -1)$.
Répondre en utilisant le graphique.

1°) Donner une équation de la tangente (T)

2°) Déterminer $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{f(x)}{x-4}$.

3°) Déterminer $(f \circ f)'(0)$.

4°) Justifier l'existence d'un point de (C) d'abscisse comprise entre 0 et 2 où la tangente à (C) est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Exercice n°2 (5pts)

On cosidére dans le plan orienté un losange ABCD de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

1°) a) Montrer que si f est une isométrie qui laisse globalement invariant le losange ABCD alors f fixe le point O.

b) Déterminer alors les quatre isométries qui laissent globalement invariant le losange ABCD.

2°) a) Donner la nature et les éléments carartéristiques des isométries suivantes :

$f_1 = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ et $f_2 = S_{(CD)} \circ S_{(CA)}$.

b) Carctériser alors l'isométrie $g = r_{(C\ ,\ -\frac{\pi}{3})} \circ r_{(A\ ,\ \frac{\pi}{3})}$.

3°) On note E , F , et G les symétriques respectiques des points A , D et C par rapport au point B.
Soit h l'isométrie telle que : $h(A) = E$, $h(B) = F$ et $h(D) = B$.

a) Montrer que h n'admet aucun point fixe .

b) En déduire que h est une symétrie glissante.

c) Montrer que $S_{(BD)} \circ h = t_{\overrightarrow{DB}}$.

d) Donner alors l'axe et le vecteur de h.

Exercice n°3 (5,5 pts)

On donne l'équation (E_α) : $z^2-(1+i)e^{i\alpha}.z+ie^{2i\alpha}=0$ avec $\alpha\in[0\,,2\pi]$

A)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α)

B) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{U}\,,\vec{V})$,

on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 avec $z_1=e^{i\alpha}$ et $z_2=ie^{i\alpha}$

1°) Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle et isocele

2°) On pose $Z=z_1+z_2$

a) Donner le module et un argument de Z

b) En déduire les valeurs éxactes de $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$

c) Soit I le milieu du segment $[M_1M_2]$

i) Montrer que lorsque α varie dans $[0,2\pi]$ le point I décrit un cercle (C) que l'on précisera

ii) Montrer que (M_1M_2) est tangente à (C)

3°) On suppose que $\alpha\in[0,\pi]$

a) Montrer que $\left(\widehat{\vec{U}\,,\overrightarrow{M_1M_2}}\right)\equiv\alpha+\frac{3\pi}{4}\,[2\pi]$

b) En déduire la valeur de α pour la quelle la droite (M_1M_2) est parallèle à l'axe $(O\,,\vec{V})$

c) Placer dans l'annexe (II) les points M_1 et M_2 pour la valeur trouvée de α

d) Soit A le point d'affixe $z_A=1+i$, calculer l'aire du triangle AM_1M_2

Exercice n°4 (6,5 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+3x}$

On désigne par (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$

1°) Montrer que la droite D : $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

2°) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Intépreter géométriquement le résultat

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de f et tracer (C) dans l'annexe (I).

3°) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer la courbe (C') de f^{-1}.

c) Calculer $f^{-1}(x)$ pour $x\in J$.

4°) Soit U la suite définie par : $\begin{cases}U_0=2\\ U_{n+1}=f(U_n)\quad;\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $U_n\geq1$.

b) On a tracé dans l'annexe (I) la courbe (Γ) de la dérivée seconde de f.

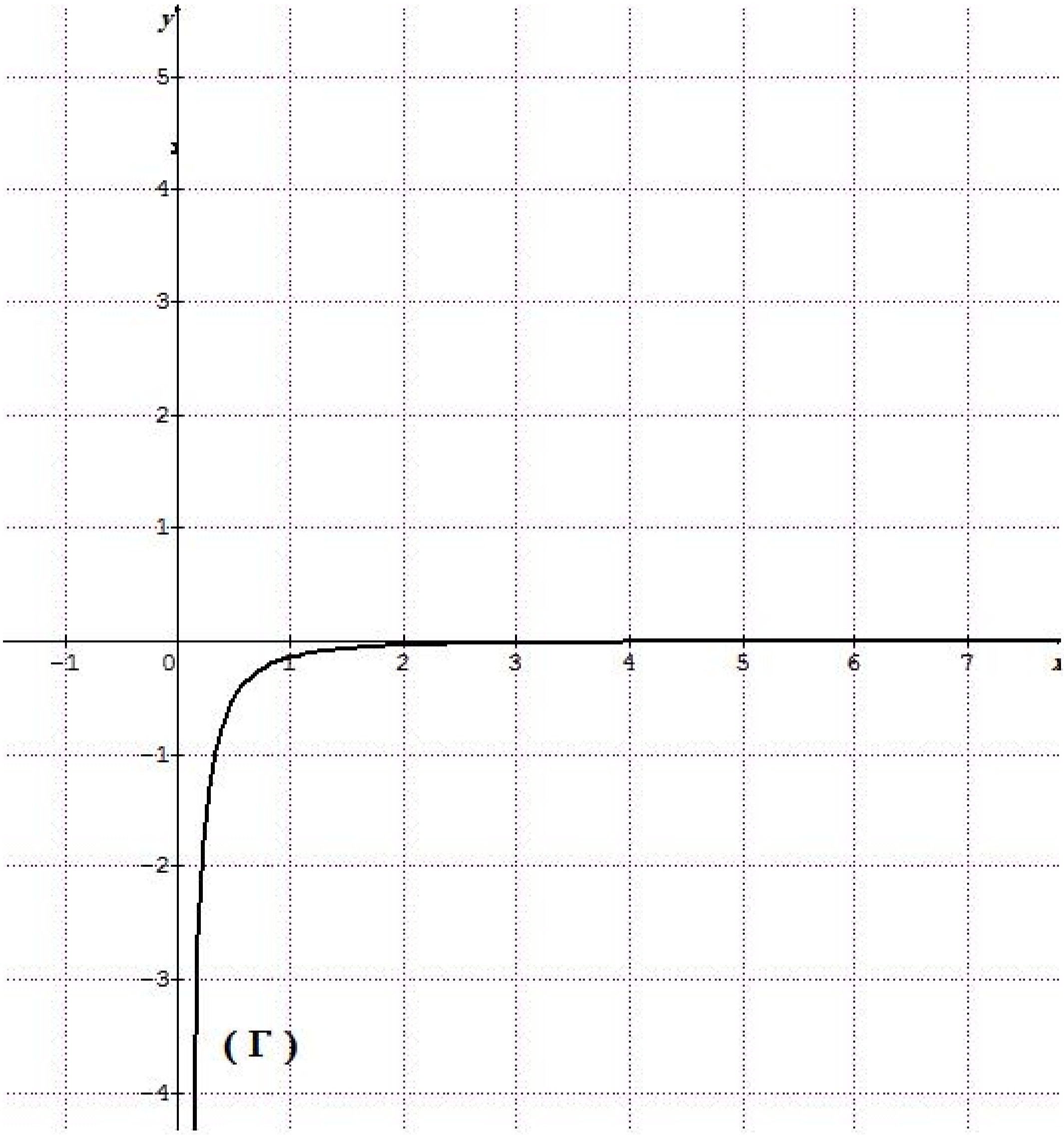
En s'aidant de la courbe (Γ) , montrer que pour tout réel $x\geq1$, on a : $f'(x)\leq\frac{5}{8}$

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $|U_{n+1}-1|\leq\frac{5}{8}|U_n-1|$ et que $|U_n-1|\leq\left(\frac{5}{8}\right)^n$.

d) Déterminer alors la limite de U.

Nom et prénom :………………………………………………..

Annexe (I)



Annexe (II)