Mathématiques		Devoir de synthese n°1	
Lycée O.C. M'SAKEN			
4 ème Maths	Mardi 03-12-2014	Durée : 3 heure	Prof : Karmous Abdelhamid & Salem Hassine

Exercice 1 (2 points)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse :

1) Soit f une fonction dérivable et strictement croissante sur $[-1,2]$ vérifiant $f'(x) \leq \frac{1}{2}$ .alors :
   a- il existe un réel $\alpha \in]-1,2[$ verifiant : $3f'(\alpha) - f(2) + f(-1) = 0$
   b- On suppose que $f(-1) = 0$ et que $f(2) = 1$ alors la fonction f^{-1} est dérivable en $\beta = f(\alpha)$ et que $(f^{-1})'(\beta) = 3$
   c- l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\lambda \in]-1,2[$
2) Si f est une isométrie sans points fixes alors fof est une translation.

Exercice 2 (4 points)

Soit θ un reel de l'intervalle $[0, 2\pi[$

1) a/ résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $z^2 - (2i - ie^{-i\theta})z - 1 + e^{-i\theta} = 0$
   b) Mettre les solutions sous la forme exponentielle

2) le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A , B et N d'affixes respectives : i , 3i , et $i - ie^{-i\theta}$

a) Montrer que l'ensemble des points N lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$ est un cercle (Γ) que l'on précisera

b) Déterminer les valeurs de θ de $[0, 2\pi[$ tel que la droite (BN) est tangente au cercle (Γ).

Exercice 3(6 points)

A] Soit n un entier naturel non nul .

On considère la fonction f_n définie sur IR par : $f_n(x) = \frac{1}{n}x^3 + 3x - 2$.

1) a/ Etudier les variations de f_n .
   b/ Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans IR puis vérifier que $0 < \alpha_n < 1$
   c/ En déduire le signe de $f_n(x)$ pour $x \in$ IR
2) a/ Montrer que $f_n(\alpha_{n+1}) = \frac{(\alpha_{n+1})^3}{n(n+1)}$. En déduire le signe de $f_n(\alpha_{n+1})$
   b/ En déduire le sens de variation de la suite (α_n)
   c/ En déduire que suite (α_n) est convergente et determiner sa limite .

B] soit g la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} G(x) = \dfrac{2(x^3+1)}{x^2+1} & \text{si } x < 1 \\ G(x) = 1 + \sqrt{2x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1) Montrer que G est dérivable en 1
2) a/ montrer que pour $x \in]-\infty, 1[$ on a : $G'(x) = \frac{2x f_1(x)}{(x^2+1)^2}$
   b/ Dresser le tableau de variation de G .
3) a/ Etudier les branches infinies de (C)
   b/ Tracer la courbe (C) . (on prendra $\alpha_1 = 0,6$)

Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux

Exercice 4(4 points)

Soit f la fonction définie sur $[0\ ,\ \pi[$ par f(x) = tg $(\frac{x}{2})$

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera
2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et montrer que $(f^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$
3) Pour tout $x \in]0\ ,+\infty[$ on pose $\varphi(x) = f^{-1}(\sqrt{x}) + f^{-1}(\frac{1}{\sqrt{x}})$

   a/ Montrer que φ est dérivable sur $]0\ ,+\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$

   b/ Calculer $f^{-1}(1)$ puis déduire que pour tout $x \in]0\ ,+\infty[$; $f^{-1}(\frac{1}{\sqrt{x}}) = \pi - f^{-1}(\sqrt{x})$
4) On considère les deux suites U et V définies sur IN^* par : $U_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} f^{-1}(\sqrt{k})$ et $V_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} f^{-1}(\frac{1}{\sqrt{k}})$

   a/ Montrer que pour tout $n \in IN^*$; $f^{-1}(\sqrt{n}) \leq U_n \leq f^{-1}(\sqrt{2n})$

   b/ En déduire que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite .

   c/ Exprimer V_n en fonction de U_n ; puis déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} V_n$.

Exercice 5(4 points)

Dans le plan orienté , on considère un triangle rectangle isocèle IAB tel que $(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, K = I * A et L = I * B

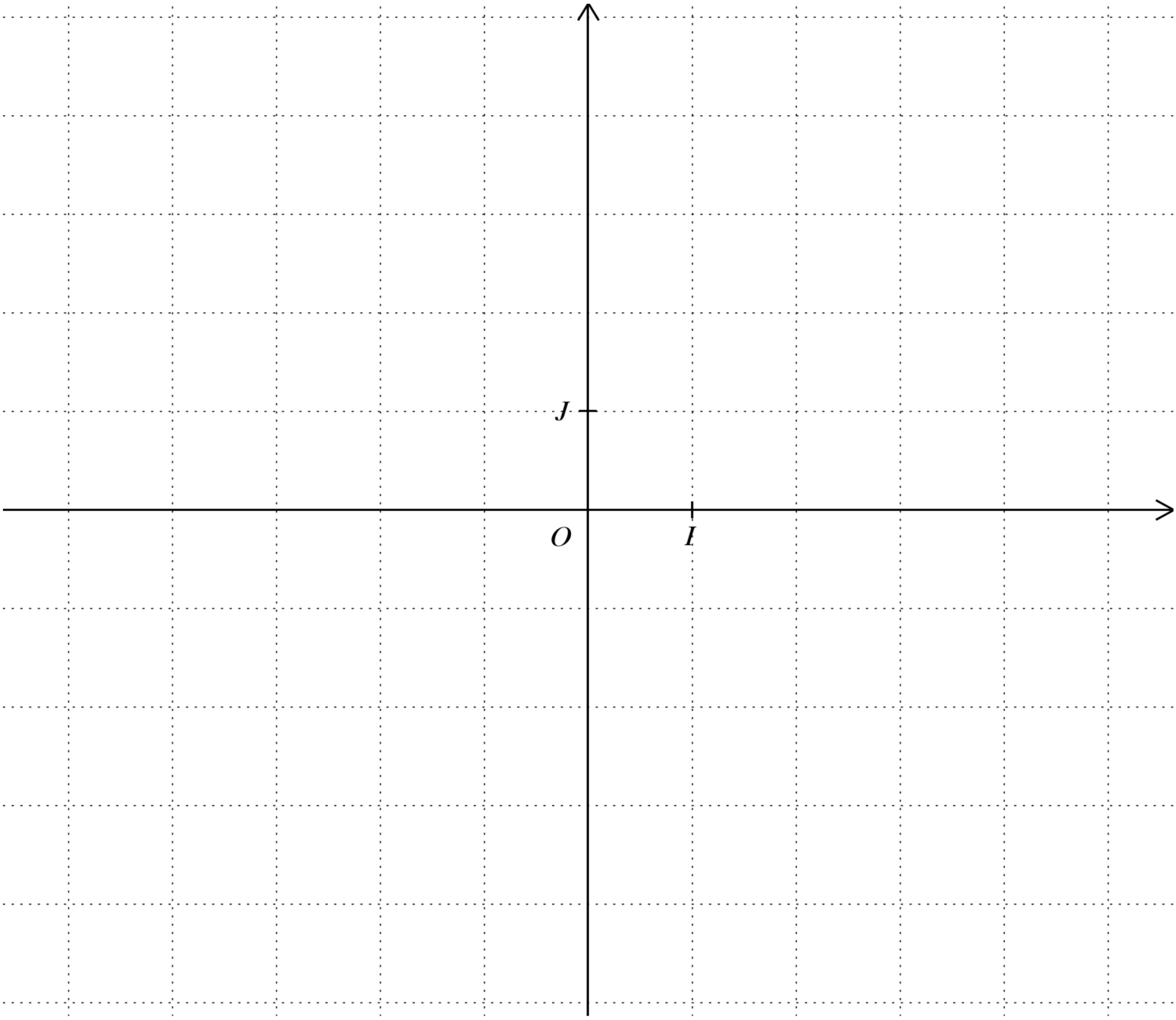
1) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f (A) = I et f(I) = B . Montrer que f est une rotation, préciser son centre Ω .
2) On note H = S_A(I) et Δ la perpendiculaire à (ΩH) en Ω qui coupe (BI) en C
   a) Déterminer f ((AI)) et f $((\Omega H))$.
   b) En déduire f (H) .
   c) Montrer alors que C est le symétrique de B par rapport à I .
3) a) Soit g l'antidéplacement tel que g(A) = I et g (I) = B . Montrer que g est une symétrie glissante , donner sa forme réduite puis construire $\Omega' = g(\Omega)$.

   b) On pose h = $T_{\overrightarrow{IA}}$ og , determiner h (Ω) et h (A) . Caractériser h

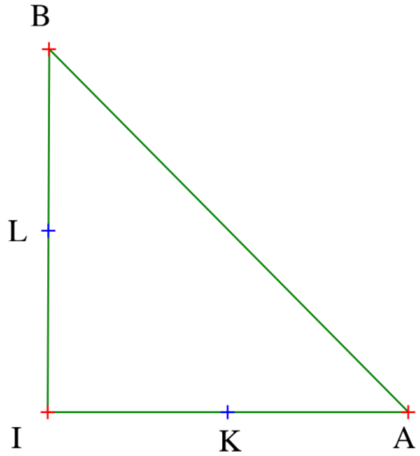
4) Pour tout point M du plan , on note M' = f(M) et M'' = g(M) .Montrer que M' et M'' sont symétriques par rapport à un droite que l'on précisera.

Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux

Nom et Prénom : ....



Exercice 5 :



Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux

Exercice 5 :

Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux