Lycée de Mateur
DUREE 3 H

DEVOIR DE SYNTHESE N°1

2014/2015

SAIDANI MOEZ
BAC MATHS

EXERCICE N°1 ....(5 *points*)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\alpha) : z^2 - (1+i)e^{i\alpha}z + ie^{i2\alpha} = 0$

2. Dans le plan complexes muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$,on considère les points M_1et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 avec $z_1 = e^{i\alpha}$ et $z_2 = ie^{i\alpha}$

   (a) Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle et isocèle en O

   (b) Soit I le milieu du segment $[M_1M_2]$.

      i. Montrer que,lorsque α varie sur $[0, 2\pi]$ le point I varie sur le cercle ξ de centre O et de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

      ii. Montrer que la droite (M_1M_2) est tangente à ξ

   (c) On suppose que $\alpha \in [0, \pi]$

      i. Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{M_1M_2}}\right) \equiv \alpha + \dfrac{3\pi}{4}\,[2\pi]$

      ii. En déduire la valeur de α pour laquelle la droite (M_1M_2) est parallèle à l'axe $(O, \overrightarrow{v})$.

EXERCICE N°2 ....(5 *points*)

le plan est orienté dans le sens direct; soit $ABCD$ un carré de centre O et telque $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$

1. Soit f une isométrie qui laisse globalement invariant le triangle ABD.

   (a) Montrer que $f([BD]) = [BD]$.

   (b) Prouver alors que $f(O) = O$ et que $f(A) = A$.

   (c) En déduire toute les isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABD.

2. Soit g une isométrie qui transforme le triangle ABD en le triangle BCD.

   (a) Montrer que l'application $S_O \circ g$ est une isométrie qui laisse globalement invariant le triangle ABD.

   (b) En déduire toutes les isométries qui transforment le triangle ABD en le triangle BCD.

3. On suppose que $AB = 1$.le plan étant muni d'un repère orthonormé$\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

   (a) Déterminer les affixes de chacun des points A, B, C, D et O.

   (b) Soit h l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = -\overline{z} + 1 + i$.
   Montrer que h est une isométrie sans point invariant.

   (c) Déterminer $h(A)$ et $h(B)$ et déduire la nature de h.

EXERCICE N°3 ....($7points$)

1. On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par:$f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

   (a) Etudier la dérivabilité de f en 0.et donner une interprétation géométrique.

   (b) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation .

   (c) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[1,+\infty[$ et une bijection de$[1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

   (d) Soit $g=f_{|[1,+\infty[}$

      i. Représenter la courbe de g dans un repère orthonormé.

      ii. Montrer que $g^{-1}(x)=\dfrac{1}{x^2}\left(2\sqrt{1-x^2}-x^2+2\right)$

      iii. Répresenter la courbe de g^{-1} dans le même repère.

2. Soit la fonction :$x \overset{\tan}{\mapsto} \tan x$.

   (a) Montrer que la fonction tan est une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) On note h la réciproque de tan ,montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $h^{'}(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

3. On considère la fonction φ définie sur $[1,+\infty[$ par $\varphi(x)=2h(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x})$

   (a) Montrer que φ est bien définie

   (b) Montrer que φ est décroissante en utilisant la composition des fonctions.

   (c) Vérifier que $\varphi'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\dfrac{2(x-1)}{x^2+6x+1}$

   (d) Montrer que $\varphi(2)>\dfrac{\pi}{3}$**(sans utiliser la calculatrice)**

   (e) Montrer que l'équation $\varphi(x)=x$ possède une unique solution $\alpha\in]1,2[$

   (f) En utilisant la question $1)d)ii)$donner l'expresion de $\varphi^{-1}(x)$ **(facultative).**

copie à rendre

nom et prénom.......................

classe.....................................

N..

CHOISIR LA BONNE REPONSE

Si f une fonction dérivable en 0 telles que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ alors $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(2\sin x)}{x} =$

a) 0 b) 1 c) 2

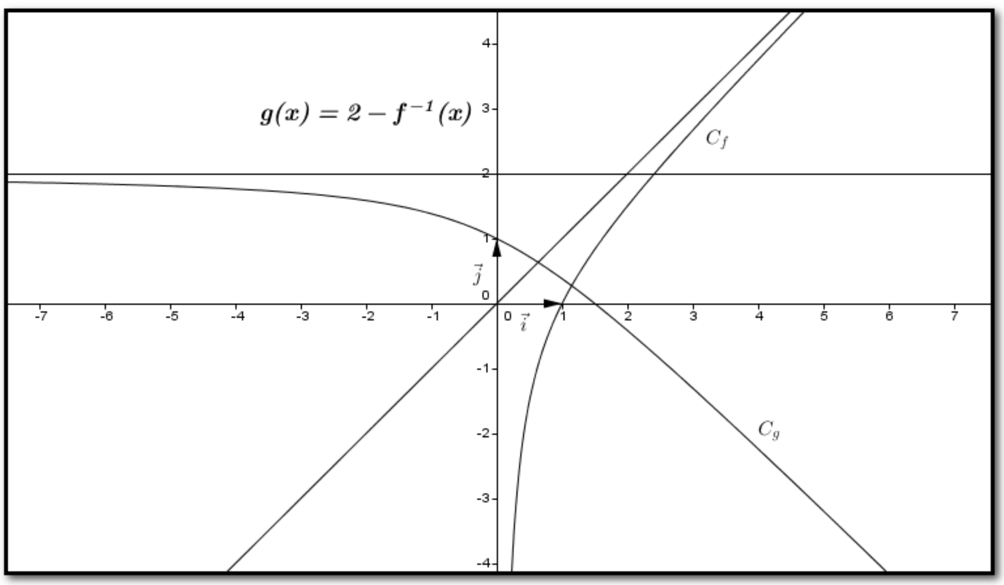
$ABCD$ est un carré direct de centre O et I le milieu de $[AB]$ alors l'isométrie $S_{(AD)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(BC)}$ est:

a) La symétrie orthogonale d'axe (OI) b) La symétrie orthogonale d'axe (AD) c) $t_{\overrightarrow{BA}} \circ S_{(AD)}$

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour toute $x \in \mathbb{R}.\ |f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$ alors:

a) $|f(-5) - f(3)| \leq 2$ b) $|f(-5) - f(3)| \leq 1$ c) $|f(-5) - f(3)| \leq 4$

Soit f une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}.g$ la fonction définie par $g(x) = 2 - f^{-1}(x)$ dont les courbes sont représentées ci- dessous :



alors C_g est l'image de C_f par

a) une translation b) une rotation c) une symétrie orthogonale

Préciser les éléments caractéristiques (**facultative**)