L. Regueb	Mathématiques	Classe : $4^{ème}$M
Prof : Salhi Noureddine	Devoir de Synthèse №1	Le:09/12/2014 D:3h

Exercice1(5pts)

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. On désigne par I , J et O les milieux respectifs des segments [BC] , [AB] et [AC], et soit D le symétrique de B par rapport à O .

1) Prouver que ABCD est un losange .

2) Caractériser chacune des isométries suivantes.

a) $f = S_{(BC)} \circ S_{(AD)}$

b) $g = S_{(AB)} \circ S_{(AD)}$

c) $h = f \circ g$

3) Soit $\varphi = t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AC)}$.

a) Déterminer $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$; en déduire $(\varphi \circ \varphi)(A)$.

b) Montrer que φ n'est pas une symétrie orthogonale .

c) Prouver que φ est une symétrie glissante et donner son axe et son vecteur .

Exercice2(8pts)

Soit f la fonction définie sur $[1\,,+\infty[$ par : $f(x) = x - \sqrt{x^2-1}$

1)a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2) Dresser le tableau de variation de f et en déduire que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $]0,1]$.

3) Tracer dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, les courbes représentatives de f et f^{-1} .

4) Expliciter $f^{-1}(x)$; $x \in\ ]0\,,1]$.

5) Pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$, on pose : $g(x) = f\left(\frac{1}{\cos(x)}\right) + \tan(x)$.

a) Etudier les variations de g .

En déduire que g réalise une bijection de $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera .

b) Montrer que g^{-1} est dérivable en 2 et calculer la dérivée.

Exercice3(7pts)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par B le point d'affixe 1 et a un nombre complexe différent de 1 .

Soit f l'application définie par : f : P\{B}⟶P, M(z) ⟶M'(z')) telle que z'= $\frac{z-a}{z-1}$

1) Montrer que les affixes des points invariants par f sont solutions de l'équation : (E) : $z^2 - 2z + a = 0$.

2) On suppose que $a = 1 + e^{i2\theta}$ avec $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

b) Mettre chacune des solutions de (E) sous forme exponentielle.

3) On note M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $1 + ie^{i\theta}$ et $1 - ie^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

a)Déterminer et construire les ensembles décrits par M_1 et M_2 lorsque θ varie dans $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

b)Montrer que pour tout $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, le triangle OM_1M_2 est rectangle en O.

c)Déterminer θ dans $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ pour que le tringle OM_1M_2 soit isocèle.

4) Dans cette partie on suppose que $a = -1 = z_A$.

a) Montrer que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BM}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BM'}}\right) \equiv 0\ [2\pi]$.

En déduire que la demi-droite [BA) est une bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}\right)$.

b) Montrer que z' est imaginaire pur si et seulement si $|z| = 1$.

c) En déduire la construction du point M' image d'un point M du cercle trigonométrique privé du point B.