REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION Lycée Ibn Khaldoun Jammel - Monastir		**Mr : Afli Ahmed** **Devoir de Synthèse n°1**	
SECTION :	**Mathématiques**		
EPREUVE :	**MATHEMATIQUES**	DUREE : 3h	COEFFICIENT : 4

❖ **Exercice 1 :** *(5points)*

Soit l'équation (E) : $z^2 - 2(a+2i)z + 2a^2 + 4ia - 4 = 0$; a est un paramètre complexe.

1. / Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

2. / Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,on considère les points M , P,Q d'affixes respectives : a , $z_1 = (1+i)a + 2i$ et $z_2 = (1-i)a + 2i$

   a. Montrer que : $z_2 = -iz_1 - 2 + 2i$

   b. En déduire que Q est l'image de P par une rotation dont on précisera le centre I et l'angle α.

   c. On suppose que a est non nul et on note J le milieu de [PQ].

      i..Montrer que J est l'image de M par une translation que l'on précisera.

      ii..Montrer que (IJ) et (PQ) sont perpendiculaires.

3. / Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout point M(z) on associe le point M'(z') tel que : $z' = i\bar{z} - 2 - 2i$

   a. Montrer que g est un antidéplacement.

   b. Déterminer g(I) et g(O)

   c. Montrer que l'écriture complexe de $g \circ g$ est : $z'' = z - 4 - 4i$

   d. Caractériser alors g.

❖ **Exercice 2 :** *(4points)*

Soit ABC un triangle isocèle et rectangle tel que $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit O le milieu de [AC].

On désigne par I le milieu de [OB] et par D le symétrique de O par rapport à (BC).

1. a. Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A) =C et f(O) =D

   b. Montrer que f est une rotation de centre B et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

   c. Soit K = f(I) .Montrer que K est le milieu de [BD].

2. On pose g = $S_{(BO)} \circ S_{(AB)} \circ f^{-1}$.

   a. Déterminer g(B) et g(C)

   b. En déduire que $f^{-1} = S_{(AB)} \circ S_{(BO)}$

3. On pose $h = S_{(OD)} \circ f^{-1}$.On désigne par (Δ) la médiatrice du segment [BD].

   a. Déterminer h(B) et h(**D**)

   b. Montrer que h est la symétrie glissante d'axe (Δ) et de vecteur $\overrightarrow{BO}$.

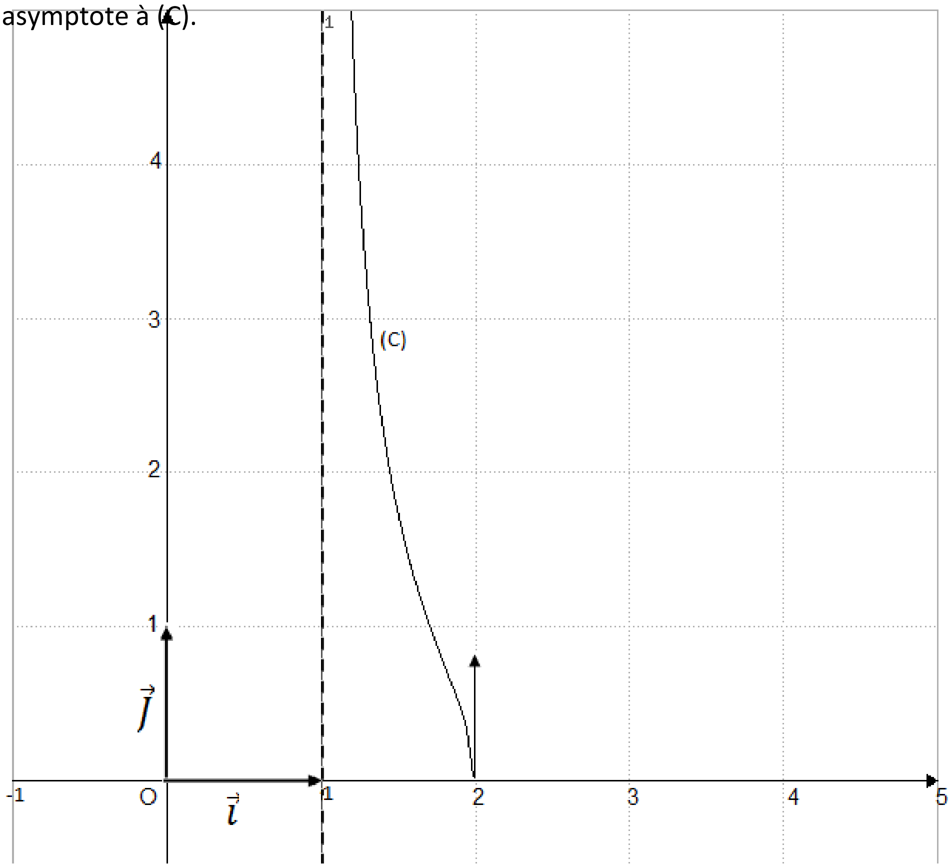
4. Déterminer l'ensemble des ponts M du plans tel que : $h(M) = f(M)$.

5. Caractériser l'application $S_{(BO)} \circ h$.

❖ **Exercice 3 :** *(6points)*

-La courbe ci-dessous est la représentation graphique (C) d'une fonction f définie sur]1,2] dans un repère orthonormé$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

-La droite d'équation x = 1 est une asymptote à (C).



1. Par lecture graphique :
   a. Montrer que f n'est pas dérivable à gauche en 2 et donner $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)}{x-2}$
   b. Montrer que f réalise une bijection de]1,2] sur un intervalle J que l'on précisera.
   c. Montrer que f^{-1} est dérivable à droite en 0 et déterminer $(f^{-1})'_d(0)$
2. On admet que f(x) = $\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$
   a. Montrer que l'équation f(x) = x admet dans]1,2] une unique solution α et que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$
   b. Montrer que $(f^{-1})(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\forall\, x\ \in [0,+\infty[$
3. Soit la suite (T_n) définie par $T_0 = 1$ et $T_{n+1} = f^{-1}(T_n)$ pour tout n ∈ ℕ.
   a. Montrer que tout n∈ ℕ, $T_n \in [1;2]$
   b. Montrer que pour tout x ∈ [1; 2] , $|(f^{-1})'(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$
   c. Montrer que tout n ∈ ℕ ; $|T_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{\sqrt{2}}|T_n - \alpha|$.
   d. En déduire que la suite (T_n) est convergente et déterminer sa limite.
4. Soit φ la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ par : $\begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{f^{-1}(\tan(2x))} & si\ x\ \in [0,\frac{\pi}{4}[\\ \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$
   a. Montrer que $\forall\, x\ \in [0,\frac{\pi}{4}]$ on a : $\varphi(x) = \frac{1}{1+\cos(2x)}$
   b. Montrer que φ réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{4}]$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$
   c. Montrer que φ^{-1} est dérivable $]\frac{1}{2}, 1]$ et que : $(\varphi^{-1})' = \frac{1}{2x\sqrt{2x-1}}$

❖ **Exercice 4 :** *(5points)*

Soit f la onction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = \dfrac{2\sin x}{1 - \sin x}$

(C) désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I ,J)

1. Etudier f et tracer (C).(préciser la demi-tangente en 0)

2. a. Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur [0 ;+∞[.Déterminer g(0) et g(2)

   b. Tracer la courbe représentative (C') de g dans le repère$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ .en déduire la position de (C') par rapport à la droite Δ : y = x

   c. Montrer que g est dérivable sur [0 ;+∞[et que $g'(x) = \dfrac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$

3. Soit (u_n) la suite definie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

   a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$

   b. Montrer que (u_n) est décroissante, en déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.

4. Soit (v_n) la suite definie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = n\left[g\left(u_n + \frac{2}{n}\right) - g\left(u_n + \frac{1}{n}\right)\right]$

   a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe $c_n \in]\, u_n + \frac{1}{n} \,;\, u_n + \frac{2}{n} [$ tel que $v_n = \dfrac{1}{(2+c_n)\sqrt{1+c_n}}$

   b. En déduire que (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

Bon Travail