

Exercice N°1: (5 points)

On considère un triangle ABC rectangle en A et isocèle tel que $(\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Soit I le milieu de [BC].

- 1) Soit f une isométrie tel que $f(\{B, C\}) = \{B, C\}$.
 - a) Montrer que f fixe I.
 - b) En déduire toutes les isométries f vérifiant $f(\{B, C\}) = \{B, C\}$.
 - c) Quelles sont ceux qui laissent ABC globalement invariant ?
- 2) Soit $D = S_{(BC)}(A)$ et g une isométrie qui transforme le triangle ABD en ACD.
 - a) Montrer que $g(B) = C$ et que g laisse I invariant.
 - b) Déterminer les isométries g.
- 3) Caractériser l'isométrie $r = S_{(AD)} \circ S_{\Delta}$ où Δ est la médiatrice de [BD].
- 4) Soient M et N les points tel que $\overline{AM} = \frac{1}{4} \overline{AB}$ et $\overline{BN} = \frac{1}{4} \overline{BD}$.

Montrer que $r(M) = N$ et en déduire que la médiatrice de [MN] passe par un point fixe.

- 5) a) Montrer que $S_{\Delta} \circ S_{(AB)}$ est une translation dont on précisera le vecteur.
- b) En déduire la forme réduite de l'isométrie $\varphi = r \circ S_{(AB)}$.

Exercice N°2: (7 points)

A) Soit la fonction f définie sur $I =]-1; 1[$ par $f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

- 1) a) Montrer que f est strictement croissante sur I.
- b) Dresser le tableau de variation de f.
- 2) a) Montrer que l'équation de $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in I$.
- b) Vérifier que $0,8 < \alpha < 0,9$ et que $\sqrt{1-\alpha^2} = \frac{\alpha}{1+\alpha}$.
- c) Donner le signe de $f(x) - x$ sur I.
- 3) Montrer que f réalise une bijection de I sur IR.
- 4) Tracer (ξ) et (ξ') les courbes représentatives respectivement de f et f^{-1} dans un même repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (unité 2cm).
- 5) Montrer que $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{\sqrt{1+(1+x)^2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 6) Montrer que pour tout $x \in [\alpha; 1[$ on a $f'(x) \geq \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^3$.
- 7) Soit (U_n) la suite réelle définie sur \mathbb{N} par $U_0 > \alpha$ et $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$.
 - a) Montrer que $U_n > \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^3 |u_n - \alpha|$.

- c) En déduire que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{2n} |U_0 - \alpha|$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.
- 8) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, on note (C_g) sa courbe représentative dans ce même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- a) Vérifier que $g(x) = 1 + f^{-1}(x-1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- b) Montrer que (C_g) est l'image de (ξ) par une symétrie glissante que l'on caractérisera.
- B)** Soit φ la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $\varphi(x) = f(\sin x)$ avec $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
- 1) Vérifier que $\varphi(x) = -1 + \tan(x)$ pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
- 2) Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur $[-1; +\infty[$.
- 3) Montrer que φ^{-1} dérivable sur $[-1; +\infty[$ et calculer $(\varphi^{-1})'(x)$.

Exercice N°3: (3 points)

- 1) Dans la figure ci-dessous, on donne les courbes C et Γ d'une fonction g définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et sa fonction dérivée g' .
Par une lecture graphique, distinguer la courbe de g et celle de g' .

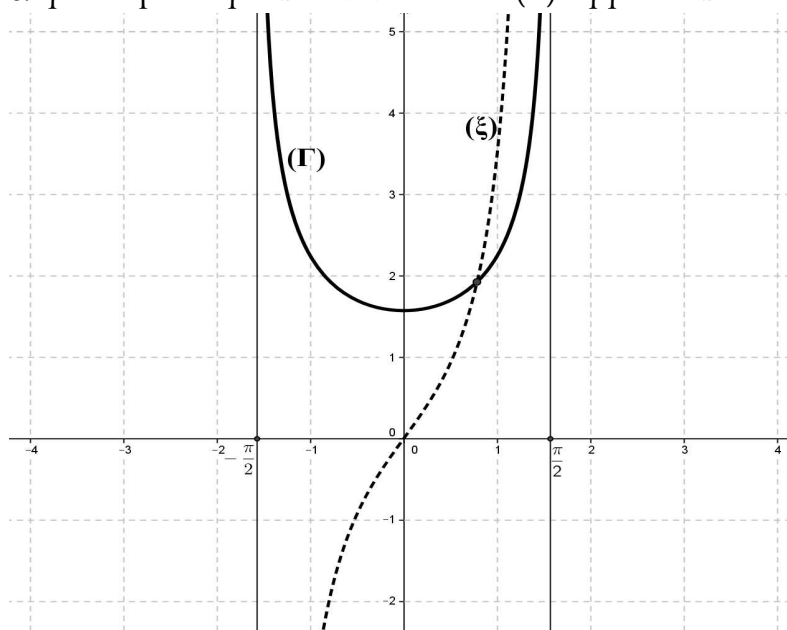
- 2) On admet que $g(x) = \frac{1}{\cos x}$, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Montrer que le point d'intersection de C et Γ a pour abscisse $\frac{\pi}{4}$.

- 3) Soit un réel $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ On considère, dans C , l'équation :

$$(E_\alpha) : (\cos^2 \alpha)z^2 - (e^{i\alpha} + \cos^2 \alpha)z + e^{i\alpha} = 0.$$

- a) Vérifier que le réel 1 est une solution de (E_α) .
- b) En déduire la deuxième racine $U(\alpha)$ de (E_α) .
- c) Ecrire $U(\alpha)$ sous forme algébrique et vérifier que $U(\alpha) = g(\alpha) + ig'(\alpha)$.
- d) Déterminer le réel α pour que le point M d'affixe $U(\alpha)$ appartienne à la droite $\Delta : y = x$.



Exercice N°4: (5 points)

A) On considère, dans \mathbb{C} , l'équation (E): $z^3 - 6(2+i)z^2 + (36+54i)z - 108i = 0$

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle a et une solution double b à préciser.

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soient les points A, A_0, A_1 et A'_1 d'affixes respectives : $3, 6, 3(1+i)$ et $3(1-i)$. Déterminer la nature du quadrilatère $OA'_1A_0A_1$.

B) Pour tout réel $\alpha \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on considère l'application f_α du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = e^{i\alpha}z + 3(1 - e^{i\alpha})$.

1) a) Montrer que f_α est une isométrie.

b) Montrer que f_α admet un seul point invariant qu'on précisera.

2) a) Vérifier que $z' - 3 = e^{i\alpha}(z - 3)$.

b) En déduire que la médiatrice du segment $[MM']$ passe par un point fixe qu'on précisera.

3) Vérifier que $f_{\frac{\pi}{2}}(z) = iz + 3(1-i)$ et que $A_1 = f_{\frac{\pi}{2}}(A_0)$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = f_{\frac{\pi}{2^n}}(A_{n-1})$.

Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = f_{\frac{\pi}{2^n}}(A_0)$.

5) a) Déterminer les coordonnées $(X_n; Y_n)$ du point A_n en fonction de n .

b) Trouver les limites des suites (X_n) et (Y_n) .

BON TRAVAIL