

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1 :
BAC MATH: LYCEE FERIANA: DUREE: 3H: PROF: MHAMDI

EXERCICE N°1 : (5pts)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle $ABCD$ de centre I tel que :
 $(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ soit J le milieu de $[BA]$ et K le milieu de $[AD]$ (**ANNEXE2**)

1°) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que $f(B) = D$ et $f(I) = A$

2°) Montrer que f est une symétrie glissante d'axe (AC) et de vecteur \overrightarrow{IA}

3°) Soit O le milieu de $[IB]$. Montrer que $f(O) = K$

4°) Soit $P = S_{(AC)}(O)$

a) Montrer que $\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{IA}$

b) En déduire que P est le milieu de $[CD]$

5°) Soit $g = S_I \circ S_{(AD)}$

a) Déterminer : $g(A)$ et $g(D)$. Montrer que g est une symétrie glissante

b) Montrer que $S_I = S_{(IK)} \circ S_{(IJ)}$. Caractériser g

6°) Soit $h = g \circ f$

a) Déterminer $h(B)$ et $h(I)$

b) Montrer que h est une rotation dont déterminera l'angle et le centre

EXERCICE N°2 : (4,5pts)

Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = 1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}}$. On désigne par Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé

1°) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 .

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 .

2°)a) Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et pour tout $x \in]0, 1[$ on a :

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1-\sqrt{x}}}$$

b) Etudier les variations de f

3°) a) Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$ on a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 - x$$

b) Dans **L'ANNEXE N°1** on a tracé la courbe C_3 en pointillé représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. Montrer graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α et construire le point A de Γ d'abscisse α

4°)a) Montrer en appliquant le théorème des accroissements finies Que l'équation : $f(x) = 1$ admet dans $[0, \alpha]$ au moins une solution β_1 et dans $[\alpha, 1]$ au moins une solution β_2

b) Soit $k \in \{1, 2\}$ montrer que $f(\beta_k) = 1 - \frac{1}{4\sqrt{\beta_k}}$

c) Dans **L'ANNEXE N°1** on a tracé les courbes C_1 de la fonction f' la dérivée de la fonction f et C_2 en gras de la fonction $x \mapsto 1 - \frac{1}{4\sqrt{x}}$

Utiliser C_1 et C_2 pour construire les points $B_1 (\beta_1, f(\beta_1))$ et $B_2 (\beta_2, f(\beta_2))$

5°) Tracer Γ ainsi que les tangentes aux points B_1 et B_2

EXERCICE N°3 : (3,5pts)

On considère dans \mathbb{C} l'équation $E_m: z^3 + mz^2 - \bar{m}z - 1 = 0$

où m est un paramètre complexe

1°) Résoudre l'équation E_0 (pour $m = 0$)

2°) Dans cette question $m \neq 0$

a) Montrer que si z_0, z_1 et z_2 sont les solutions de E_m alors $z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 = 1$

b) Montrer que si z est solution de E_m alors $\frac{1}{z}$ est aussi solution de E_m

c) Montrer que E_m admet au moins une solution de module 1

3°) Dans cette question on suppose que $|m| = 1$ et $\arg(m) \equiv \alpha[2\pi]$

a) Vérifier que $(-m)$ est solution de E_m

b) Déterminer les solutions de E_m

c) Résoudre alors dans \mathbb{C} , l'équation : $2z^3 + (1 + i\sqrt{3})z^2 - (1 - i\sqrt{3})z - 2 = 0$

EXERCICE N°4 : (3pts)

1°) Pour tout x et a de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que : $a > 0$ on pose :

$$g(x) = \sin x - x - x^3 \left(\frac{\sin a - a}{a^3} \right)$$

a) Montrer qu'il existe $c \in]0, a[$ tel que : $g'(c) = 0$

b) On pose $\theta = \frac{c}{a}$ Montrer que $a - \sin a = \frac{a^3}{3} \times \frac{1 - \cos a\theta}{(a\theta)^2}$

c) Dédire les résultats suivants :

(1) Pour tout $a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$; $\sin a < a$

(2) $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{a - \sin a}{a^3} = \frac{1}{6}$

2°) On considère la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \text{ si } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } f(0) = 0$$

a) Montrer que pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{\sin x} \times \left(\frac{\sin x - x}{x^3} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \right)$$

b) Montrer que f est dérivable à droite en 0

c) Montrer que pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ on a : $f'(x) = \frac{1}{(\sin x)^2} - \frac{1}{x^2}$

d) Etudier les variations de f

EXERCICE N°5 : (4pts)

Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 0$; $U_1 = 1$ et $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$, $n \in \mathbb{N}$

1°) Montrer que

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 0$

b) Pour tout entier naturel $n \geq 5$ on a : $U_n \geq n$

c) (U_n) est une suite divergente

2°) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$U_{n+2} \cdot U_n - U_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$$

3°) Soit pour tout entier naturel n non nul les deux suites

$$(V_n) \text{ et } (W_n) \text{ définies par : } V_n = \frac{U_{2n+1}}{U_{2n}} \quad \text{et} \quad W_n = \frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}}$$

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $V_{n+1} - V_n = \frac{-1}{U_{2n+2} \cdot U_{2n}}$

Et déduire la monotonie de (V_n)

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $W_{n+1} - W_n = \frac{1}{U_{2n+3} \cdot U_{2n+1}}$

Et déduire la monotonie de (W_n)

c) Montrer que pour tout entier naturel non nul on a : $V_n - W_n = \frac{1}{U_{2n+1} \cdot U_{2n}}$

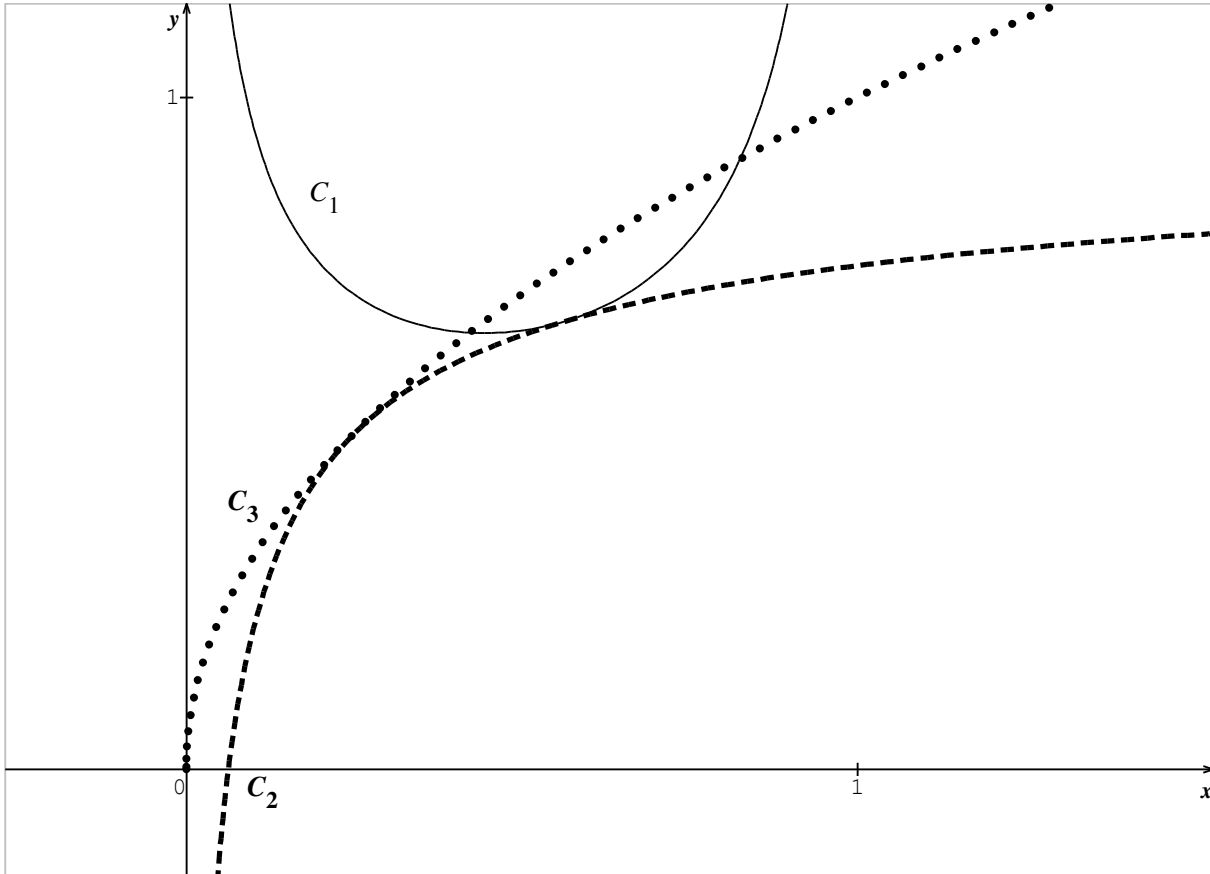
d) Déduire que les suites (V_n) et (W_n) convergent vers une limite commune α

e) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $W_n = 1 + \frac{1}{V_n}$

Déduire la valeur exacte de α

FEUILLE A RENDRE : NOM..... PRENOM.....

ANNEXE1 :



ANNEXE2 :

