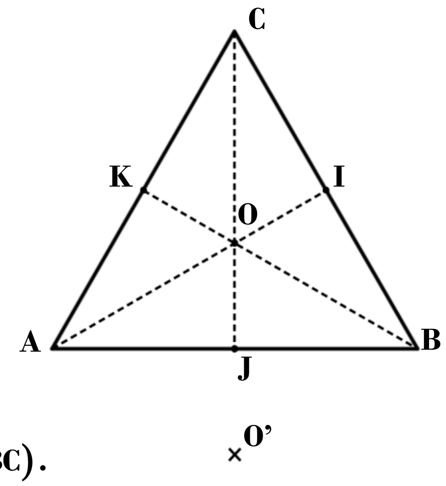
LYCEE IBN-ALHAITHEM BEN GARDENE		PROF : NOBBIGH Dhaou
	DEVOIR DE SYNTHESE N°01	
MATHEMATIQUES	4ème MATHS 1	A S : 2015-2016 *** DUREE : 3heures

Le sujet comporte 4 pages

EXERCICE 1 5 points



Dans la figure ci-contre :

- ABC est un triangle équilatéral de centre O, tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
- I, J et K sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[AB]$ et $[AC]$.
- $O' = S_{(AB)}(O)$.

1) Montrer que BOAO' est un losange de centre J et que $(BO') \perp (BC)$.

2) a) Montrer qu'il existe un seul déplacement φ vérifiant $\varphi(B) = C$ et $\varphi(O') = O$.

b) Préciser l'angle de φ. En déduire que φ est une rotation dont on précisera le centre.

3) Soit $g = t_{\overrightarrow{CB}} \circ \varphi$.

a) Vérifier que $\varphi = S_{(AI)} \circ S_{(AB)}$.

b) En déduire que g est une rotation dont on précisera l'angle et le centre.

4) Soit ψ l'antidéplacement tel que $\psi(B) = C$ et $\psi(O') = O$

a) Monter que ψ est une symétrie glissante d'axe (IJ).

b) Déterminer $S_{(IJ)}(B)$. En déduire le vecteur de $\vec{u}$ de ψ.

5) Soit Ω l'intersection de (BK) et (IJ). On pose $h = S_\Omega \circ \psi$

a) Déterminer $h(J)$. En déduire que h est une symétrie orthogonale.

b) Vérifier que $S_\Omega = S_{(BK)} \circ S_{(IJ)}$. En déduire que : $h = S_{(BK)} \circ t_{\overrightarrow{JI}}$

c) Déterminer l'axe de h.

EXERCICE 2 3 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$. On appelle g l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = i\bar{z} + 1 + i$.

1) Montrer que g est une isométrie.

2) a) Montrer que g n'admet pas des points fixes.

b) En déduire que g est une symétrie glissante.

3) On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = 1 + i$, $z_C = 1 + 2i$ et $z_D = 2 + 2i$

a) Déterminer $g(A)$ et $(g \circ g)(O)$.

b) Caractériser alors g.

Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux

EXERCICE 3 **6 points**

Soit f la fonction définie sur $[0,2[$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{2-x}$.

On désigne par C sa courbe dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Monter que f est dérivable sur $]0,2[$ et que pour tout $x \in]0,2[$, on a :

$f'(x)=\dfrac{1}{(2-x)\sqrt{2x-x^2}}$

c) Dresser le tableau des variations de f.

d) Monter que f réalise une bijection de $[0,2[$ sur $[0,+\infty[$.

On note g sa fonction réciproque.

e) Montrer que g est dérivable à droite en 0.

2) a) Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.

b) Tracer dans le même repère C , T et C' la courbe de g.

c) Montrer que pour $x \in [0,+\infty[$, on a : $g(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$.

On admet dans la suite que g est dérivable sur $[3,4]$ et que pour tout $x \in]3,4[$, on a : $\lvert g'(x)\rvert \leq \dfrac{4}{25}$.

3) Montrer que l'équation $g(x)=\dfrac{1}{2}x$ admet dans $]3,4[$ une solution unique α .

4) On considère la suite U définie sur IN par $\begin{cases} U_0 \in \left]\dfrac{\alpha}{2},2\right[\\ U_{n+1}=g(2U_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\dfrac{\alpha}{2} < U_n < 2$.

b) Montrer que $\left|U_{n+1}-\dfrac{\alpha}{2}\right| \leq \dfrac{8}{25}\left|U_n-\dfrac{\alpha}{2}\right|$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

EXERCICE 4 **6 points**

Dans la figure ci-jointe :

- C est la courbe d'une fonction f , continue et dérivable sur $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{4}\right[$ dans un repère orthonormé.
- La demi tangente à C au point $A\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ passe par le point $B\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.
- La droite $\Delta : x=\dfrac{\pi}{4}$ est une asymptote verticale à C.

1) **Par lecture graphique :**

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \dfrac{f(x)}{x+\frac{\pi}{2}}$.

b) Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On note g sa fonction réciproque.

c) Justifier la dérivabilité de g sur J.

d) Tracer C' dans le même repère.

e) Dresser le tableau des variations de g.

2) Dans la suite de l'exercice, on admet que pour tout réel $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right[$, on a : $f(x)=\dfrac{1}{1-\tan x}$.

a) Montrer que pour $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right[$, on a : $f'(x)=\dfrac{1+\tan^2 x}{(1-\tan x)^2}$.

b) Montrer que pour tout $x>0$, $g'(x)=\dfrac{1}{2x^2-2x+1}$

3) Soient h et k les fonctions définies sur $]4,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $k=g\circ h$.

a) Vérifier que si $x\in]4,+\infty[$ alors $0<h(x)<\dfrac{1}{2}$.

b) Montrer que k est dérivable sur $]4,+\infty[$ et que pour tout $x\in]4,+\infty[$ on a :

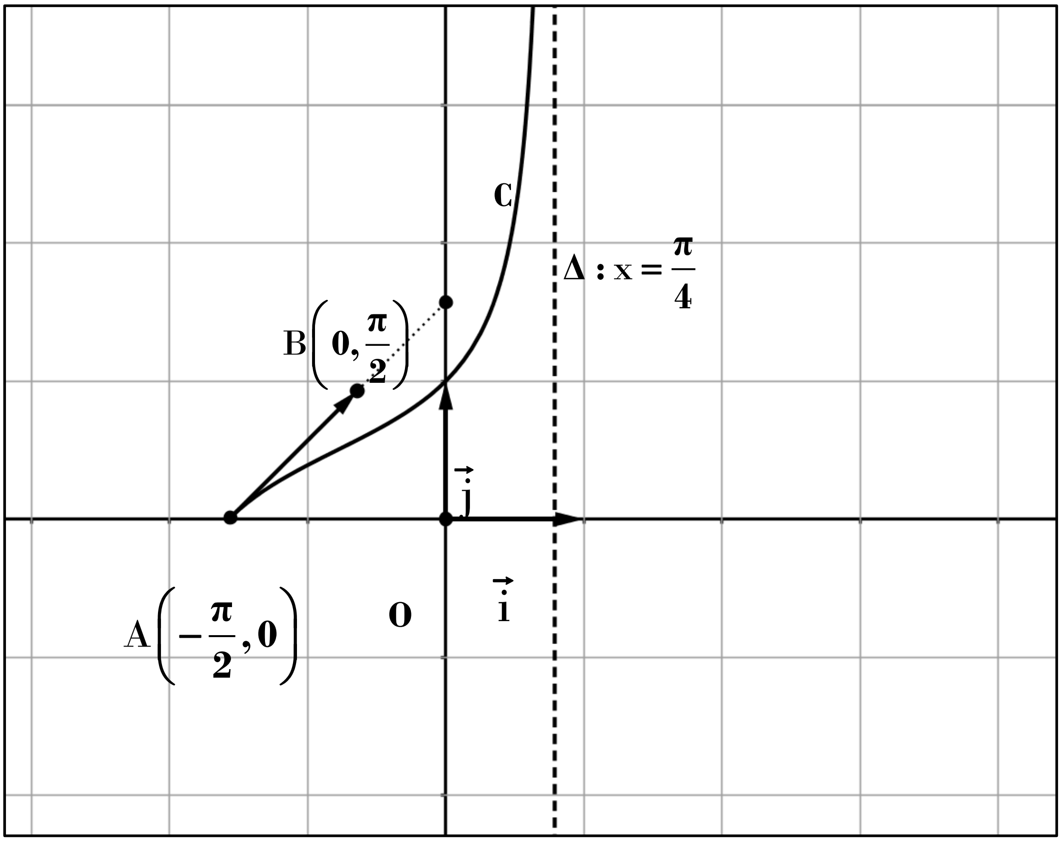
$$k'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{x}\left[2(h(x))^2-2h(x)+1\right]}$$

c) Calculer que $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et montrer que k réalise une bijection de $]4,+\infty[$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right[$.

d) Montrer que pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right[$, on a : $k^{-1}(x)=4\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^2$.

Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux

Nom et prénom : ....$4^{ème}$ MATHS N° ....



Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux