Lycée Martyr Wallid Méchlaoui Mornag	Devoir de synthèse 1	Le :08/12/2015 4éme Math
Prof : Oueslati Mongi		Duré : 3 H

Exercice 1 (3 points)

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.Soit le point A(1 ;0) et les points M et M' d'affixes respectives z et $z'=\dfrac{z+1}{z-1}$

1) Montrer que z' est imaginaire pur si et seulement $|z|=1$
2) Montrer que $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{AM}})+(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{AM'}})\equiv 0[2\pi]$
3) Déduire que [AO) est la bissectrice de $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'})$
4) Soit $M(z)\in C_{(O;1)}\setminus\{A\}$ et M'(z') .Donner une méthode de construction de M'

Exercice 2 (6 points)

Soit f une fonction définie sur [0 ;π[par $f(x)=\sqrt{\tan(\frac{x}{2})}$

1) a) Etudier la dérivabilité à droite en 0
Interpréter géométriquement le résultat.

b)Montrer que pour tout $x\in]0;\pi[$ on a $f'(x)=\dfrac{1+\tan^2(\frac{x}{2})}{4.\sqrt{\tan(\frac{x}{2})}}$

c)Montrer que $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)=+\infty$

2) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que f admet une réciproque qu'on note g
Déterminer g(1)

c) Montrer que que pour tout x>0 ; $g'(x)=\dfrac{4x}{1+x^4}$

3) Soit h la fonction définie sur]0 ;+∞[par : $h(x)=g(x)+g(\frac{1}{x})$

a) Déterminer h'(x) , en déduire que pour tout x>0 , h(x)=π

4) Soit u_n une suite réelle définie sur IN^* par : $u_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} g(\frac{k}{n^2})$

Montrer que $g(\frac{1}{n^2}) \leq u_n \leq g(\frac{1}{n})$; en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 3 (6 points)

Dans le plan orienté , on considère un rectangle ABCD de centre O tel que :

$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et AB=2AD

On désigne par I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD].

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A)=C et f(I)=J
   b) Caractériser f
2) Soit $g = R_{(I\,;\,\frac{\pi}{2})} \circ f$
   a) Montrer que g est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et que ICD triangle rectangle et isocèle en I
   b) Déterminer g(A) et g(I)
   c) En déduire que le centre Ω de g est le milieu de [ID]
3) Soit h l'antidéplacement tel que h(A)=C et h(I)=J
   a) Montrer que h(B)=D
   b) Soit E=h(C) . Montrer que DJ=DE et $(\widehat{\overrightarrow{DJ};\overrightarrow{DE}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$
   c) En déduire que D est le milieu de [AE]
   d) Montrer alors que h est une symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{AD}$ Et d'axe (IJ).

Exercice 4 (5 points)

Soit f_n une fonction définie sur IR par : $f_n(x)= x^3+nx-n$; avec $n \in IN^*$

1) Vérifier que f_n est croissante sur IR
2) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une solution unique β_n dans]0 ;1[
   Vérifier que : $\beta_n^3 + n\beta_n = n$
3) a) Vérifier que $f_{n+1}(\beta_n)=\beta_n-1$ et $f_{n+1}(\beta_{n+1})=0$
   b) Déterminer $f_{n+1}(\beta_{n+1})-f_{n+1}(\beta_n)$; en déduire que β_n est croissante et que β_n est convergente