L. Regueb	Mathématiques	Classe : $4^{ème}$M
Prof : Salhi Noureddine	Devoir de Synthèse №1	Le:05/12/2015 D:3h

Exercice1(6pts)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte .Indiquer avec justification la bonne réponse .

Soit dans le plan orienté un carré ABCD de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et I le milieu de $[AB]$.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

1) L'isométrie qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = -\bar{z} + 1 + i$ est une :

a) translation b) symétrie axiale c) symétrie glissante

2) La transformation complexe associée au déplacement f tel que $f(O) = B$ et $f(A) = O$ est :

a) $z' = iz - \frac{1}{2}(1+i)$ b) $z' = -iz + \frac{1}{2}(1+i)$ c) $z' = iz + \frac{1}{2}(1+i)$

3) L'isométrie ; $g = S_{(BC)} \circ S_{(BD)} \circ R_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$ est une :

a) rotation b) translation c) symétrie glissante

4) L'isométrie ; $h = t_{\overrightarrow{BD}} \circ S_{(BC)}$ est égale à :

a) $t_{\overrightarrow{CD}} \circ S_{(OI)}$ b) $t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(OI)}$ c) $S_{(BC)}$

Exercice2(6pts)

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 - (3+i)z + 2(1+i) = 0$.

2) Soit l'équation (E_θ): $z^2 - (3+i)e^{i\theta}z + 2(1+i)e^{i2\theta} = 0$; $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a) Montrer que z est une solution de (E_θ) si et seulement si $\left(ze^{-i\theta}\right)$ est une solution de (E) .

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ) .

3) On considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = 2e^{i\theta}$, $b = (1+i)e^{i\theta}$ et $c = ie^{i\theta}$.

a) Donner la forme exponentielle de b et c .

b) Montrer que $(OA) \perp (OC)$ et $(BO) \perp (BA)$.

c) Construire les points A , B et C pour une valeur de θ choisie arbitrairement dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

4)a) Montrer que pour tout $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; OABC est un trapèze .

b) Vérifier que pour tout $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; l'aire de ce trapèze est constante .

Exercice3(8pts)

Soit la fonction f définie sur $]1\,,2]$ $par : f(x) = \frac{\sqrt{2x- x^2}}{x-1}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

1)a) Etudier la dérivabilité de f à gauche de 2 et interpréter graphiquement le résultat obtenu .

b) Montrer que f est dérivable sur $]1\,,2[$ et prouver que pour tout $x \in\,]1\,,2[$; $f'(x) < 0$.

2)a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Montrer que f réalise une bijection de $]1\,,2]$ sur un intervalle J que l'on précisera .

c) On désigne par (C') la courbe représentative de f^{-1}, tracer dans le meme repère les courbes (C) et (C') et préciser les branches infinies .

3)a) Montrer que pour tout $x \in J$; $f^{-1}(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+ x^2}}$.

b) Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet dans $]1\,,2]$ une unique solution α .

4) Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $1 \leq u_n \leq 2$.

b) Montrer que pour tout $x \in [1\,,2]$; $|(f^{-1})'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$.

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite .