Direction régionale de l'éducation Tunis 1	Devoir de Synthèse n° : 1 Mathématique	Année scolaire 2016/2017
Lycée : El Montazeh Mourouj 2	Durée : 3 H	Classe : 4ème Math
Mr : Gary Badreddine	Date : 03/01/2016	Coefficient : 4

Le sujet comporte 2 pages numérotées de 1/2 à 2/2.

Exercice 1 : (7 pts)

Dans le plan orienté, on considère un carré **ABCD** de centre **I** et tel que :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi].$$

I. On désigne par **J** et **K** les milieux respectifs de **[AD]** et **[CD]** ,par **C'** le symétrique de **C** par rapport à **D** , et on désigne par R_D et R_B les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectives **D** et **B** et par S_I la symétrie centrale de centre **I**.

1. Soit $f = R_D 0 S_I 0 R_B$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. On pose $g = f 0 S_{(IJ)}$.

a) Déterminer $g(C)$ et (D) .

b) En déduire que g est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques.

3. a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $S_{(AD)} 0 S_{(CD)} 0 S_{(IK)} 0 S_{(IJ)}$.

b) En déduire que $S_K 0 S_{(IJ)}$ est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

II. Soit **Ω** le point de concours des bissectrices intérieures du triangle **ABD** . On désigne par : r la rotation de centre **A** et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre **D** et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

1. Construire le point **A'** image de **A** par r' .

2. Donner la nature et les éléments caractéristiques de $r' 0\, r$.

3. Montrer que $\Omega A' = \Omega A$ et les droites $(\Omega A')$ et (AB) sont parallèles.

Exercice 2 : (13 pts)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan .

I. **1.** Étudier les variations de f.

2. a) Écrire une équation de la tangente $\mathbf{T}$ à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $\mathbf{0}$.

b) Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à $\mathbf{T}$.

c) Tracer $(\mathcal{C})$ et $\mathbf{T}$.

3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle $\mathbf{J}$ que l'on précisera .

b) Tracer la courbe $(\mathcal{C}')$ de g^{-1} dans le même repère **.**

c) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$**.**

II. **1.** Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans $[1, +\infty[$ une unique solution $\alpha \in]1, 2[$.

2. Montrer que $\forall x \in]1, 2[: |g'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ **.**

3. Soit la suite (U_n) par : $\begin{cases} U_0 \in]1, 2[\\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : U_n \in]1, 2[$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : | u_{n+1} - \alpha | \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} | u_n - \alpha |$.

III. Soit h la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\begin{cases} h(x) = -1 + \left[f\left(\frac{1-\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)}\right)\right]^2 \quad si\ x \neq \frac{1}{2} \\ h\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

1. Montre que h est continue en $\frac{1}{2}$. Et que $\forall x \in [0, 1] : h(x) = \cos(\pi x)$.

2. Étudier les variations de . En déduire que h réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un intervalle que l'on précisera .

3. Montrer que $h^{-1}(x)$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et calculer $(h^{-1}(x))'$ $\forall x \in]-1, 1[$.