Lycée Houmet Souk Prof : Loukil Mohamed	Devoir de Synthèse N : 1 Durée : 3 Heures	4 Mathématiques 2 03 - 01 - 2017

EXERCICE N : 1 (1.5 points)

Pour chacune des questions suivantes , une seule des trois réponses proposées est exacte . Sans justification , le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie .

1) Soit f une fonction continue sur IR , alors $\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} \int_2^x f(t)\,dt \right)$ est égal à :

a) 0 **b)** $f(2)$ **c)** $+\infty$

2) Le volume $\mathbf{V}$ du solide engendré par la rotation de l'arc :

$\widehat{AB} = \{ M(x;y) \in P$ tels que : $0 \leq x \leq 2$ et $y = \frac{x\sqrt{3}}{x^3+1} \}$ au tour de l'axe des abscisses est :

a) $\frac{8\pi}{9}$ **b)** $\frac{\pi}{3}$ **c)** $\frac{4\pi}{27}$

3) $F(x) = \int_{x+1}^{2x} \frac{t^4}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$. La fonction F est définie sur :

a) $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ **b)** $]-\infty ; -2[\cup]\frac{1}{2} ; +\infty[$ **c)** $]0 ; \frac{1}{2}[\cup]1 ; +\infty[$

EXERCICE N : 2 (4 points)

Dans le plan orienté dans le sens direct , On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, on désigne par O et I les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AC]$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement φ qui envoie O en A et B en C .

b) Prouver que φ est une rotation dont on précisera l'angle puis construire son centre Ω .

c) Montrer que le point $\Omega \in [AB]$.

2) Soit R la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $\varphi \circ R$.

b) Soit $C' = \varphi(C)$. Prouver que A est le milieu du segment $[CC']$.

3) Soit ψ l'antidéplacement qui envoie O en A et B en C .

a) Montrer que ψ est une symétrie glissante .

b) Vérifier que O appartient à Δ axe de ψ puis déduire la forme réduite de ψ .

4) Soit $f = t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(AB)}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

EXERCICE N : 3 (4 points)

Soit la fonction F définie sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$ par : $F(x) = \int_{2}^{1+\tan^2(x)} \frac{dt}{t\sqrt{t-1}}$.

1) a) Justifier l'existence de F sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$.

b) Montrer que la fonction F est paire .

c) Calculer $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

2) a) Montrer que F est dérivable sur $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

b) En déduire que pour tout $x \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$; $F(x) = 2x - \frac{\pi}{2}$.

c) Expliciter $F(x)$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; 0\right[$.

d) Calculer alors l'intégral : $J = \int_{2}^{4} \frac{dt}{t\sqrt{t-1}}$.

3) On considère la suite (I_n) définie sur IN par : $I_n = \int_{2}^{4} \frac{\sqrt{t-1}}{t^{n+2}}\, dt$.

a) Calculer I_0 .

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante sur IN .

c) Montrer que la suite (I_n) est convergente .

EXERCICE N : 4 (5 points)

A) On donne : $f(Z) = Z^2 - (i + 2\sin\theta)\, Z + 1 - \cos\theta + i\sin\theta$; où $Z \in \mathbb{C}$ et $\theta \in IR$.

1) Montrer que : $-(2\cos\theta - 1)^2 = 4\sin^2\theta + 4\cos\theta - 5$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(Z) = 0$.

B) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points $A_{\left(1+\frac{i}{2}\right)}$, $B_{\left(-1+\frac{i}{2}\right)}$, M_1 et M_2 d'affixes respectives : $Z_1 = \sin\theta + i\cos\theta$ et $Z_2 = \sin\theta + i(1 - \cos\theta)$.

1) Soit I le milieu de $[M_1 M_2]$.Déterminer et construire l'ensemble des points I lorsque θ varie dans IR

2) Soit $\sigma : P \to P$; $M_Z \mapsto M'_{Z'}$ tel que $Z' = \overline{Z} + i$.

a) Prouver que $\sigma \circ \sigma$ est l'identité du plan .

b) Déduire la nature de σ et se(s) caractéristique(s) .

C) Dans cette question $\theta \in]0 ; \pi]$.

1) a) Mettre Z_1 et Z_2 sous forme exponentielle .

b) Déterminer et construire **(Γ)** l'ensemble des points M_1 lorsque θ varie dans $]0 ; \pi]$.

c) En utilisant l'application σ déduire la construction de **(Γ ')** l'ensemble des points M_2 lorsque θ varie dans $]0 ; \pi]$.

2) On donne $g(Z) = Z^2 - (2\sin\theta - i)\, Z + 1 - \cos\theta - i\sin\theta$.

a) Prouver que : $g(Z) = 0$ signifie que $f(\overline{Z}) = 0$.

b) Déduire alors dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation : $g(Z) = 0$.

c) Ecrire $P(Z) = f(Z)\, g(Z)$ en produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

EXERCICE N : 5 (5.5 points)

A) *Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.*

*On a tracer dans l'annexe ci-jointe la courbe **(Cf)** représentative de f dans un repère **R** orthonormé .*

1) a) *Dresser le tableau de variations de f .*

b) *Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle **J** que l'on précisera .*

2) *Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in$ **J** .*

3) *Tracer la courbe **(Cf^{-1})** dans le repère **R** .*

B) *Soit la suite (U_n) définie sur IN* par : $U_n = = \int_0^1 \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.*

1) *Calculer U_1 et interpréter graphiquement U_1 .*

2) a) *Montrer que pour tout $n \in$ IN* ; $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \dfrac{1}{(n+1)}$.*

b) *Déduire alors la limite de (U_n) .*

C) *Pour tout entier naturel $n \geq 3$; on donne : $I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$.*

1) a) *Vérifier que pour tout entier naturel $n \geq 3$ on a : $U_n + U_{n-2} = I_n$.*

b) *A l'aide d'une intégration par parties portant sur I_n ,*

montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$; $n\,U_n + (n-1)\,U_{n-2} = \sqrt{2}$.

2) a) *Montrer que la suite (U_n) est décroissante sur IN* .*

b) *En déduire que pout tout entier naturel $n \geq 3$; $U_n \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2n-1}$.*

c) *Donner alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (n\,U_n)$.*

4) *Dans l'annexe ci-jointe on a tracé la courbe de la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$.*

*Déduire de ce qui procède l'aire **A** de la partie hachurée .*

Bonne chance

Nom et Prénom :

Annexe à rendre avec la copie