Ministère de l'éducation

Direction régionale de Mahdia

Lycée secondaire

Tahar Sfar - Mahdia

DEVOIR DE SYNTHESE N°1 DE MATHEMATIQUES

- **Niveau : 4^{eme} Maths**
- **Profs : TAREK MEDDEB & AMOR SAIDI**
- **Durée : 3 heures**
- **Date : 24 / 12 / 2016**

Thèmes traités :

- **Complexe – fonctions et fonctions réciproques – Suites**
- **Déplacements et antidéplacements**

- L'attention des élèves est attiré sur le fait que la qualité de la rédaction ,l'écriture lisible , le soin apporté à la copie , la clarté et la précision des raisonnements entrent pour part importante dans l'appréciation des copies
- L'épreuve comporte 4 pages numérotés de 1/4 à 4/4

EXERCICE N°1 (3 pts)

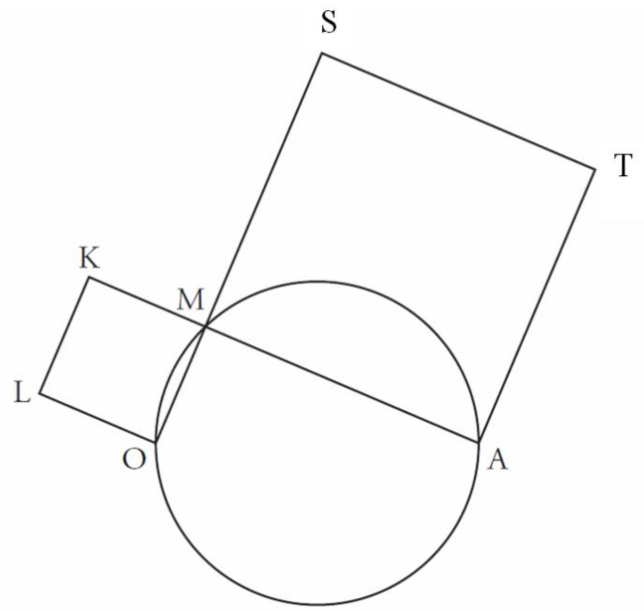
Soit f_n la fonction définie sur $[0\,;1]$ par : $f_n(x)=x^n\sin(\pi x)$.

1) Montrer qu'il existe un réel $\alpha_n\in\,]0\,;1[$ tel que $f_n'(\alpha_n)=0$.
2) Exprimer $\sin(\pi\alpha_n)$ en fonction de α_n, de n et de $\cos(\pi\alpha_n)$.

   En déduire que : $f_n(\alpha_n)=-\dfrac{\pi\alpha_n^{n+1}}{n}\cos(\pi\alpha_n)$.
3) Montrer que : $|f_n(\alpha_n)|<\dfrac{\pi}{n}$, en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\alpha_n)$.

EXERCICE N°2 (4,5 pts)

Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, I est le milieu de $[OA]$, $\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre $[OA]$, un point M variable sur le cercle $\mathscr{C}$, et distinct de O et A, ainsi que les carrés de sens direct $ATSM$ et $MKLO$.



On munit le plan d'un repère orthonormé direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1.

On note m, t, s, k et l les affixes respectives des points M, T, S, K et L.

1) Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle $\mathscr{C}$, on a :
$$\left|m-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}.$$
2) Etablir les relations suivantes : $l=im$ et $t=-im+1+i$.

   Montrer ensuite que : $s=(1-i)m+i$ et $k=(1+i)m$.
3) $a/$ Démontrer que le milieu Ω du segment $[TL]$ est un point indépendant de la position de M sur le cercle $\mathscr{C}$.

   $b/$ Démontrer que Ω appartient au cercle $\mathscr{C}$.
4) $a/$ Calculer la distance KS et démontrer que cette distance est constante.

   $b/$ Montrer que le triangle ΩKS est rectangle et isocèle en Ω.
5) Démontrer que le point S appartient à un cercle fixe dont on déterminera le centre et le rayon.

EXERCICE N°3 (6,5 pts)

A/ Soit f la fonction définie sur IR par f(x) = $\dfrac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}$.

On désigne par ξ_f La courbe représentative de f dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a/ Déterminer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement les résultats.

   b/ Dresser le tableau de variations de f.

2) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

3) a/ Ecrire une équation de la tangente T à ξ_f au point d'abscisse 0.

   b/ Etudier la position relative de ξ_f et T (on pourra distinguer les cas $< 0 \ et\ x \geq 0$).

   c/ Tracer dans le même repère ξ_f et $\xi_{f^{-1}}$.

4) Expliciter $f^{-1}(x)$.

5) On considère la suite U définie sur IN par $U_0 = \dfrac{1}{4}$ et $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$.

   a/ Montrer que la suite U est croissante.

   b/ Montrer que la suite U est non majorée. (on pourra raisonner par l'absurde).

   c/ En déduire $\lim\limits_{n\to +\infty} U_n$.

B/ On considère la fonction g définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{f(\tan x)} & si\ x \in \left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2 \end{cases}$

1) a/ Montrer que g est continue à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$.

   b/ Montrer que, pour tout $x \in \left]0\ ;\dfrac{\pi}{2}\right]$ on a : g(x) = $1+\dfrac{1}{\sin x}$.

2) a/ Dresser le tableau de variations de g.

   b/ Montrer que g réalise une bijection de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle K que l'on précisera.

   c/ Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]2, +\infty[$ et que $(g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{x^2-2x}}$.

EXERCICE N°4 (6 pts)

Le plan orienté dans le sens direct.

On considère un rectangle ABCD tel que AB = 2AD et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par I , J et Ω les milieux respectifs de $[AB]$, $[DC]$ et $[JB]$.

1) a/ Montrer qu'il existe un unique déplacement R tel que R(B) = A et R(C) = I.

   b/ Caractériser R.

2) Soit l'application f = $t_{\overrightarrow{JB}}$ o R.

   a/ Déterminer la droite Δ tel que $t_{\overrightarrow{JB}} = S_{(IC)}$ o S_{Δ}.

   b/ En décomposant convenablement R, montrer que f est la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

3) Soit g = f o $S_{(DC)}$

   a/ Déterminer g(D) et g(J)

   b/ En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur

4) Soit h = $S_{(AJ)}$ o g^{-1} .

   Déterminer h(B) et h(C) puis caractériser h.

5) Soit M un point du plan et M_1 et M_2 les points tel que g(M) = M_1 et $t_{\overrightarrow{JB}}(M) = M_2$.

   Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera.

6) On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(A,\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AD})$ et soit φ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = -i\bar{z} + 3 + i$$

   a/ Montrer que φ est une isométrie.

   b/ Montrer que φ est sans points fixes et en déduire la nature de φ.

   c/ Montrer que $\varphi o \varphi = t_{2\overrightarrow{JB}}$, puis prouver que φ = g.

BON TRAVAIL