

Lycée Nahj El Menzeh Beni Khaled	DEVOIR DE SYNTHÈSE N° 1	Pr : Kaddour Abdelhamid Niveau 4è Math Durée 3h
-------------------------------------	-------------------------	---

EXERCICE N°1(5points)

Soit l'équation (E) : $Z^3 - (2 + i)Z^2 + (2 + 2i)Z - 2i = 0$

- 1) a- Montrer que l'équation (E) admet une racine imaginaire pure m que l'on déterminera
b- Calculer les deux autres solutions p et q avec la partie imaginaire de p est positive
c- Ecrire les solutions trouvées sous forme exponentielle
d- Résoudre dans C l'équation
 $z^6 - (2 + i)z^4 + (2 + 2i)z^2 - 2i = 0$
- 2) a- On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives m, p, et q dans le plan P rapporté à un repère orthonormé (o, u, v). Montrer que ABC est un triangle rectangle
b- Soit l'application $f : P \longrightarrow P$

$$M(z) \longrightarrow M'(z') \text{ tel que } z' = \frac{p}{\sqrt{2}}z + i\left(1 - \frac{p}{\sqrt{2}}\right)$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f

- c- Soient A', B', C' les images des points A, B, C par f, quelle est la nature du triangle A'B'C'

EXERCICE N°2(7points)

A- Soit f_n la fonction définie sur $[0, \pi/2]$ par $f_n(x) = x^n - n + n \sin x$, $n \in \mathbb{N}^*$

- 1) a- Etudier les variations de f_n
b- Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $[0, \pi/2]$ une solution unique α_n
a- Vérifier que $\sin \alpha_n = 1 - \frac{\alpha_n}{n}$
- 2) a- Montrer que pour tout x de $[0, \pi/2]$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$
b- En déduire que la suite (α_n) est croissante
c- Montrer que la suite (α_n) est convergente
b- Calculer la limite de $\sin \alpha_n$ quand n tend vers $+\infty$ en déduire la limite de α_n quand n tend vers $+\infty$

B- Soit g la fonction définie sur $[0, \pi/2]$ par

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1+f_1(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 2 \end{cases}$$

- 1) a- Montrer que g est continue sur $[0, \pi/2]$
b- Montrer que $g(\alpha_1) = \frac{1}{\alpha_1}$

C- Soit $\lambda \in]0, \pi/2]$ et Ψ la fonction définie sur $[0, \pi/2]$ par

$$\Psi(x) = \left[\frac{\sin \lambda - \lambda}{\lambda^2} \right] x^2 + x - \sin x$$

1)a) - Montrer que Ψ est dérivable sur $[0, \pi/2]$

b- Vérifier que $\Psi(0) = \Psi(\lambda)$

a- Déduire en utilisant le théorème des accroissements finis qu'il existe un réel

$c \in]0, \lambda[$ tels que

$$\frac{\sin \lambda - \lambda}{\lambda^2} = \frac{\cos c - 1}{2c}$$

2) En déduire que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = 0$

EXERCICE N°3(5points)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle $ABCD$ de centre O tel que

$$(\widehat{AB, AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

On note D' le symétrique de B par rapport à A

1) a- Montrer que (OD') est la médiatrice de $[BD]$

b- Montrer que $(\widehat{AD, OD'}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

2) Soit R la rotation qui envoie A en O et B en D et $f = S_{(OD')} \circ S_{(AD)}$

a- Montrer que R a pour angle $\frac{2\pi}{3}$. Déterminer l'angle de f

b- Déterminer $R \circ f(D)$ puis caractériser $R \circ f$, en déduire que $R = f^{-1}$

3) a- Montrer que $R(D) = D'$ et construire le point $C' = R(C)$

b- Soit $g = S_{(OD')} \circ R$. Déterminer $g(B)$ puis caractériser g

c- Construire $G = g(C)$ et montrer que $D' = C' * G$

EXERCICE N°4(3points)

Soit f la fonction définie sur $[0, 2]$ par $f(x) = \sqrt{x(2-x)}$

Soit F une primitive de f tel que $F(0) = 0$ et G la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par

$$G(x) = F(1 + \sin x)$$

1) a) Montrer que G est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et calculer $G'(x)$

b) Déduire l'expression de $G(x)$

2) Calculer $F(2)$ et $F(\frac{3}{2})$



