

**Devoir de synthèse N°1**

Classe : 4 Math

Prof : Aoiati Mohamed

Date : 05/03/2019

Durée : 4H

**( Le sujet comporte 5 page numérotées de 1/5 à 5/5)****Exercice 1 ( 5 pts)**

On muni le plan du repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On donne les points  $B(2;0)$  et  $C(0;3)$

**(Voir Annexe)**

On considère la similitude directe  $f$  qui envoie  $B$  en  $O$  et  $O$  en  $C$ .

- Déterminer le rapport et l'angle de  $f$ .
- On désigne par  $H$  le centre de  $f$ .
  - Montrer que  $H$  appartient au cercle de diamètre  $[OB]$ .
  - Déterminer  $f \circ f(B)$ . En déduire que  $H$  appartient à la droite  $(BC)$  puis construire  $H$ .
- Montrer que la forme complexe de  $f$  est  $z' = -\frac{3}{2}iz + 3i$  avec  $z$  l'affixe d'un point  $M$  et  $z'$  l'affixe d'un point  $M'$  l'image de  $M$  par  $f$ .
- On considère la parabole  $P$  d'équation  $P: y^2 - 4y - 2x = 0$ 
  - Déterminer les coordonnées de son foyer  $F$  et l'équation de sa directrice  $(D)$ .
  - Vérifier que  $O$  appartient à  $P$  et donner une équation de la tangente  $T$  à  $P$  en  $O$ .
  - Construire  $T$  et  $P$  dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .
- déterminer une équation de  $P'$  l'image de  $P$  par  $f$ .

**Exercice 2 ( 4 pts)**

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier non nul  $n$  par :  $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

- Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $u_n$  est pair.
- Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  pair non nul,  $u_n$  est divisible par 4.
- Soit  $p$  un nombre premiers strictement supérieur à 3.
  - Montrer que  $6 \times 2^{p-2} \equiv 3 \pmod{p}$  et  $6 \times 3^{p-2} \equiv 2 \pmod{p}$
  - En déduire que  $6 \times u_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$
  - Montrer alors que  $p$  divise  $u_{p-2}$ .
- On considère le nombre  $N = 499^{69} + 27^{23} + 6^{69} - 4$   
Déterminer le reste de  $N$  modulo 71.

### Exercice 3 (4 pts)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $U_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$  et  $V_n = \int_0^1 \frac{nt^n}{1+t^n} dt$ .

1.a) Calculer  $U_1$  et vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $V_n + nU_n = n$ .

b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \mathbb{R}^+$  :  $1 - t^n \leq \frac{1}{1+t^n} \leq 1$ .

c) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $1 - \frac{1}{1+n} \leq U_n \leq 1$  et calculer la limite de  $(U_n)$ .

2.a) En utilisant une intégration par parties, Montrer que pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$V_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$$

b) Montrer que pour tout réel  $x \in \mathbb{R}^+$  :  $0 \leq \ln(1+x) \leq x$ .

c) En déduire pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $0 \leq \int_0^1 \ln(1+t^n) dt \leq \frac{1}{n+1}$ .

d) Calculer la limite de la suite  $(V_n)$  et En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - U_n) = \ln 2$ .

### Exercice 4 (7 pts)

Le plan est muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Montrer que pour tout réel  $x$  non nul,  $\frac{e^x-1}{x} > 0$ .

2) On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\begin{cases} f(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a) Montrer que  $f$  est continue en 0.

b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  puis déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

3) On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

a) Montrer que pour tout  $x$  réel non nul,  $f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$ .

b) Les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  sur l'annexe (page 4/5) représente les fonctions  $g$  et  $h$  définies sur  $\mathbb{R}$

Par  $g(x) = xe^x$  et  $h(x) = e^x - 1$ .

\*Identifier la représentation graphique de chacune des fonctions  $g$  et  $h$ .

\*Donner graphiquement le signe de  $g(x) - h(x)$

\*En déduire le signe de  $f'(x)$  pour tout réel  $x$  non nul.

c) Vérifie que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) - x = f(-x)$ .

\*En déduire que  $f'(0) = \frac{1}{2}$

\*\* Déduire aussi le signe de  $f(x) - x$  pour  $x$  de  $]0, +\infty[$ .

d) Dresser le tableau de variation de  $f$ .



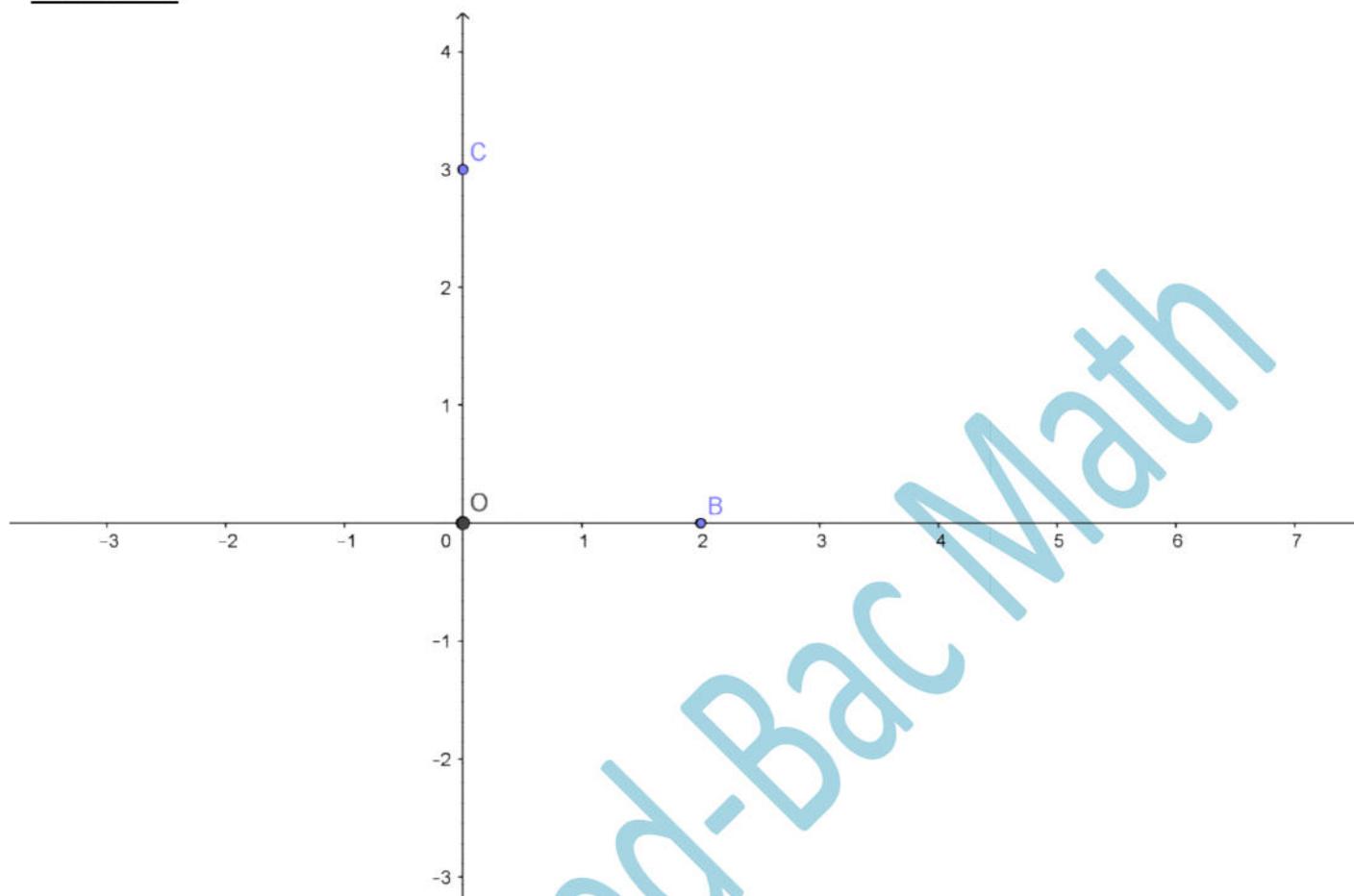
- e) Tracer  $(C_f)$  ( sur l'annexe page 5)
- 4) On considère la suite  $(U_n)$  définie par son premier terme  $U_0 > 0$   
et pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1} = f(U_n)$ .
- Montrer que pour tout entier  $n$ ,  $U_n > 0$ .
  - Montrer que la suite  $(U_n)$  est décroissante.
  - En déduire que  $(U_n)$  est convergente et préciser sa limite.
- 5) On pose pour tout entier naturel  $n$ ,  $V_n$  La valeur moyenne de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0, U_n]$   
Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq V_n \leq U_n$ .  
En déduire la limite de  $(V_n)$

Aoiatiti Med-Bac Math

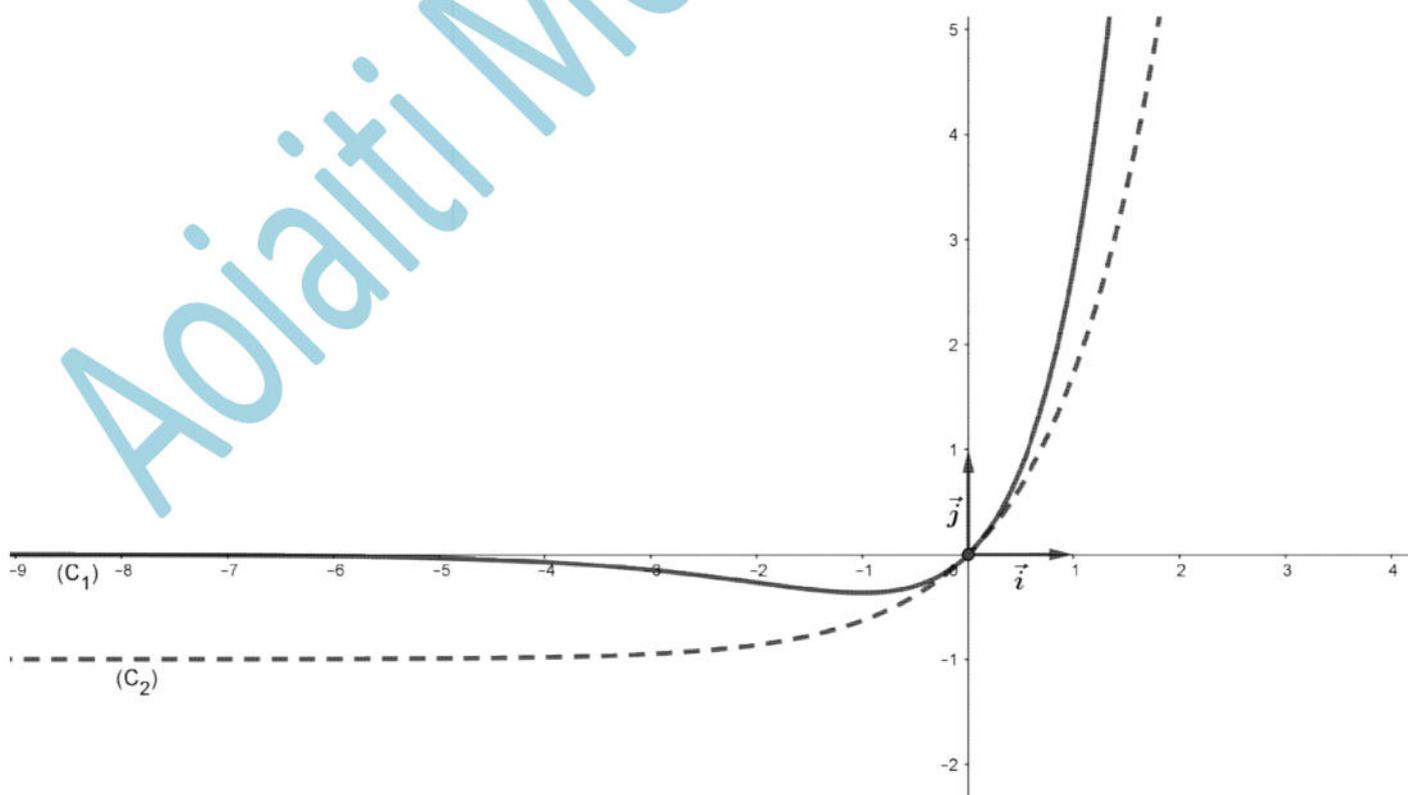


Annexe

Exercice 1



Exercice 4



Exercice 4

