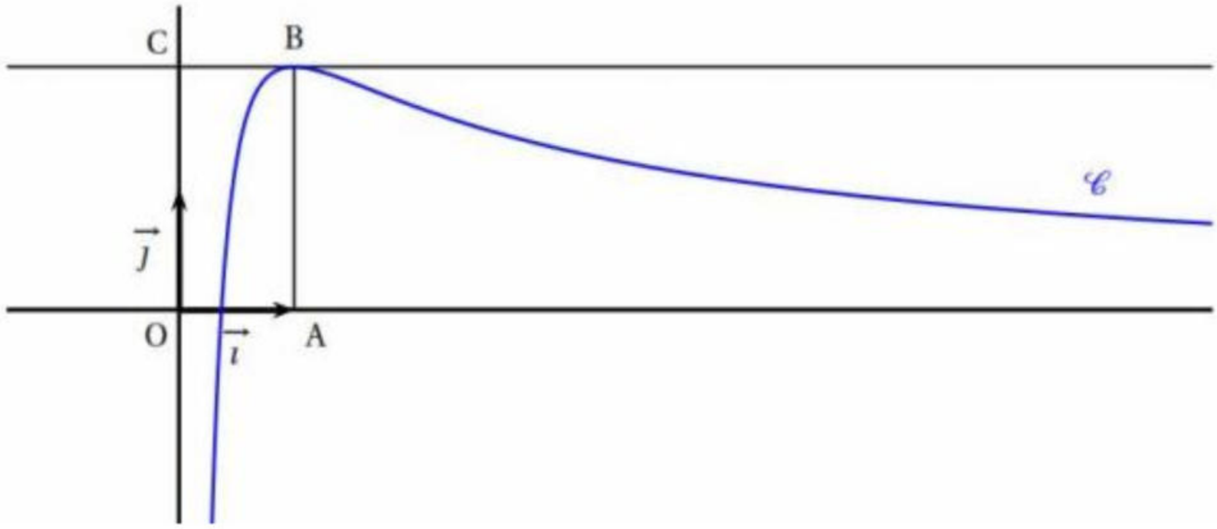
L-S :E-Elhaythem	Devoir de synthèse N°1	Prof : D – Ali
A-S :2018 /2019	Durée :4h ***Mathématiques*** Coef :4	Niveau :4 M

Exercice N°1 :03 pts

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

— les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1\,;0)$, $(1\,;2)$, $(0\,;2)$;

— la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;

— il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1. a. En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

   b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

   c. En déduire les réels a et b.

2. a. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

   b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$.

   c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,;\,1]$.

   b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$.

   Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n+1$.

Exercice N°2 :03pts

Dans le plan oriente ; on considère un triangle rectangle en A tel que $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

Et $(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ on désigne par J le projet orthogonal de A sur (BC)

1°) Soit S la similitude direct qui envoie A sur B et C sur A

a) Déterminer le rapport et l'angle de S
b) Montrer que le centre de S est le point J
c) Déterminer et construire l'image B' du point B par S

2°) Soit D le point de la demi-droite [AC) tel que AD = AB . on rapporte le plan au repère

Direct R = (A ; AB ; AD)

a) Déterminer les affixes des points B et C selon le repère R
b) Soit M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z' tel que S(M) = M'
Montrer que $z' = i\sqrt{3}\,z + 1$
c) Retrouver alors le rapport et l'angle de S et déterminer l'affixe du point J .

Exercice N°3 :04pts

1°) a) quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11

b) quel est le reste de la division euclidienne de 6^{4} par 5

c) Montrer que $6^{40} - 1 \equiv 0 \pmod{11}$ et $6^{40} \equiv 1 \pmod{5}$

d) déduire que $6^{40} - 1$ est divisible par 55

2°) dans cette question x et y désignent des entiers relatifs

a) Montre que l'équation (E) : $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution
b) Montrer que l'équation (E') : $17x - 40y = 1$ admet au moins une solution
c) Déterminer à l'aide l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E')
d) Résoudre l'équation (E') dans Z x Z
e) Montrer qu'il existe un unique entier naturel x_0 inferieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1 \pmod{40}$. trouver cet entier

3°) pour tout entier naturel a ; montrer que si $a^{17} \equiv b \pmod{55}$ et $a^{40} \equiv 1 \pmod{55}$

Alors $b^{33} \equiv a \pmod{55}$

Exercice N°4 :04pts

Le plan est rapporte à un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) . soit @ l'ensemble des Points M(x ; y) tel que : $4x.|x| + y^2 - 16x - 20 = 0$

1°) a) Montrer que @ est réunion de deux parties de deux coniques (ζ_1) et (ζ_2).

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacun des coniques (ζ_1) et (ζ_2).

2°) Montrer que qu'en chacun des points ou les coniques (ζ_1) et (ζ_2) coupent la droite (O , $\vec{\jmath}$) ***elle ont même tangente .***

3°) a) tracer les coniques (ζ_1) et (ζ_2)

b) tracer la courbe représentative de @ .

Exercice N°5 :06pts

1°) Soit la fonction φ definie sur] 1 ; +∞ [par : $\varphi(x)=\frac{x}{x-1} + Ln(x-1)$.

a) Etudier les variations de la fonction sur] 1 ; +∞ [.
b) Déduire le signe φ (x) sur l'intervalle] 1 ; +∞ [.

2°) Soit la fonction f définie sur] 1 ; +∞ [par f(x) = x Ln(x-1)

On note ζ_f la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère Orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) .

a) Etudier les variations de f sur] 1 ; +∞ [.
b) Montrer que le point I(2 , 0) est un point d'inflexion pour la courbe ζ_f .
Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à ζ_f au point I.
c) Déterminer l'intersection de la courbe ζ_f avec la droite Δ d'équation y = x .
d) Construire ; la courbe ζ_f ; la droite Δ et la tangente (T)

3°) a) Montrer que f est une bijection de] 1 ; +∞ [sur IR .

b) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f
Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur IR . Calculer $(f^{-1})'(e+1)$.
c) Tracer dans le même repère la courbe représentative de f^{-1}.
d) Déduire le tableau de variation de f^{-1} .

4°) a) Montrer que f admet un unique primitive F qui s'annule en 2

b)Soit g(x) = $\frac{x^2 Ln(x-1)}{2}$ *. Calculer g'(x) pour tout x ∈] 1 ; +∞ [.*

c) Déduire l'expression de F(x) .

Bonne chance