DEVOIR DE SYNTHESE NII **MATHEMATIQUES** 4M

Durée 4H

Exercice ①

Soit θ un réel de l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

1.a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $(\cos^2\theta)z^2-(2\cos^2\theta)z+1=0$

b) On note $z_1;z_2$ les solutions de (E) avec $\operatorname{Im} z_1 \geq 0$. Ecrire $z_1;z_2$ sous forme exponentielle. Justifier.

2.a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout réel $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$: $\frac{1}{\cos\theta}=\frac{a\cos\theta}{1-\sin\theta}+\frac{b\cos\theta}{1+\sin\theta}$

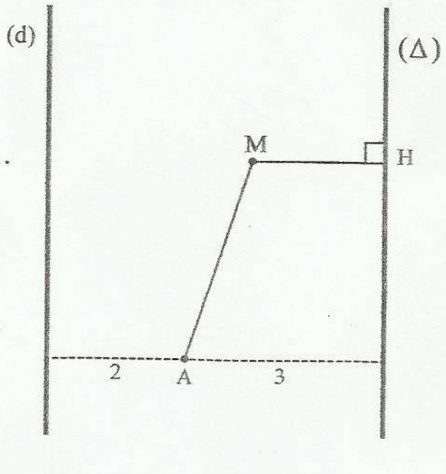
b) On pose $F(t)=\int_0^t |z_1|\,d\theta$ où $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. Donner l'expression de F(t) en fonction de t puis calculer l'intégrale :

$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} |z_1|\,d\theta$. L'écriture $|z_1|$ désigne le module de la solution z_1 de l'équation (E).

Exercice ②

Dans un plan, on donne deux droites parallèles (d) et (Δ) distantes de 5 cm et un point A situé entre (d) et (Δ) à une distance de 3 cm de (Δ).
M est un point variable du plan et H son projeté orthogonal sur (Δ).

1) Montrer que si MA + MH = 5 cm,
alors M se déplace sur une parabole (S) de foyer A.



Dans ce qui suit, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ *tel que* A(1 ; 0).

2) a- Montrer que $y^2=4x$ est une équation de la parabole (S).
b- Tracer (S).

3) Soit E un point de (S) d'**ordonnée** a telle que $a\neq 0$.

Montrer que $4x-2ay+a^2=0$ est une équation de la tangente (d_1) à (S) en E.

4) Soit G un point de (S) d'ordonnée b tel que $\widehat{EOG}=90°$.
a- Montrer que $ab=-16$.
b- La tangente (d_2) à (S) en G coupe (d_1) en un point L.

Montrer que, lorsque E et G varient sur (S) tels que $\widehat{EOG}=90°$, le point L décrit une droite que l'on déterminera.

EXERCICE (3points) 5

Pour n entier natirel non nul on pose : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

1) a-Vérifier que n est pair pour tout n de IN^*

   b- Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $a_n \equiv o \pmod 3$

2) Soit p un nombre premier p > 3

   a-Montrer que $2^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$; $3^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$ et $6^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$

   b-Montrer que a_{p-2} est divisible par p

   c-Démontrer que pour tout q premier il existe un entier naturel non nul n tel que : $a_n \wedge q = q$

EXERCICE (4points) 6

1)-On définie $[o, \pi]$ la fonction g par : g (o) = 2a et $g(t) = \frac{at + b\,t^2}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

a- Déterminer a et b pour que : $\int_o^{\pi}(at + b\,t^2) \cos(k\,t)dt = \frac{1}{k^2}$

b- Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} g\,(t)\,(\sin\frac{2n+1}{2}.t)dt$

c-Montrer que : $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} \cos(kt) = \frac{\sin(2n+1)t/2}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ endéduire que $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

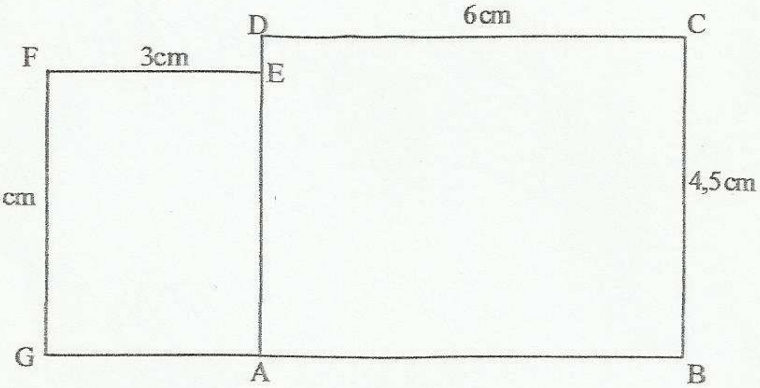
2) Soit $f_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{e^x + 1}$ pour $x > o$ et $f_n(o)=1$

   a- Montrer que : $o \leq f_o(x) \leq 1$ et que : $f_n(x) = f_o(x) - \sum_{k=1}^{k=n} x e^{-kx}$

   b- On pose $I_k(x) = \int_o^x t e^{-kt}$ dt et $I_k = \lim_{x\to+\infty} I_k(x)$ Calculer I_k

3)En utilisant les questions précedente endéduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f_o(t)\,dt = \frac{\pi^2}{6}$

Exercice 3



Dans la figure ci-dessus, ABCD et AEFG sont deux rectangles directs où $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$ (mod 2π).

S est la similitude plane directe qui transforme B en E et C en F ;

T est la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$;

f est la similitude définie par T o S.

1) a-Déterminer le rapport k et un angle α de S.

b-Déterminer l'image par S de D.

c-Démontrer que A est le centre de S.

2) a- Déterminer f(B) et f(A).

b- Préciser le rapport et un angle de la similitude f.

c- Construire le centre W de f.

Exercice 4

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par : $g(x) = x - \ln(1+x)$.

f est la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

(C) et (C') désignent les courbes représentatives respectives de g et f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1.a) Dresser le tableau de variation de g.

b)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$. Interpréter.

c) Préciser la tangente à (C) en O(0,0) et tracer (C).

2.a) Vérifier que pour tout réel x strictement positif ; $f(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$

b) Déduire le tableau de variation de f de celui de g.

c) Tracer la courbe (C') de f dans le repère précédent et préciser les positions relatives des courbes (C) et (C').

3) Soit A_n l'aire du domaine plan limité par les courbes (C) , (C') l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{n}$ et $x = n$.

a) Ecrire A_n sous forme d'intégrale.

b) Exprimer A_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$