

**Exercice N°1** (4 points)

Pour chaque question, une et une seule des réponses proposées est correcte. Le candidat doit écrire sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la bonne réponse puis donner une justification de la réponse choisie.

- 1) Soit  $f$  la transformation qui à  $M(z)$  associe  $M'(z')$  telle que :  $z' = 2i\bar{z} - 1 - i$  et  $I(1 + i)$ .
  - a)  $f$  est une similitude indirecte de rapport 2, de centre  $I$  et d'axe  $(OI)$ .
  - b)  $f$  est une similitude indirecte de rapport 2, de centre  $I$  et d'axe  $\Delta : x + 2y - 3 = 0$
  - c)  $f$  est une similitude indirecte de rapport 2, de centre  $I$  et d'axe  $\Delta : x - 2y + 1 = 0$
- 2) On considère l'équation (E) :  $24x - 16y = 8$  ; où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.
  - a) Les solutions de (E) sont de la forme :  $(x,y) = (3k + 1 ; 2k + 1)$  ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
  - b) Les solutions de (E) sont de la forme :  $(x,y) = (2k + 1 ; 3k + 1)$  ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
  - c) Les solutions de (E) sont de la forme :  $(x,y) = (16k + 1 ; 24k + 1)$  ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 3) On considère l'équation (E') :  $x^2 + 5x - 2 \equiv 0$  [17]
  - a) Les solutions de (E') sont de la forme :  $x = 17k + 13$  ou  $x = 17k + 8$  ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
  - b) Les solutions de (E') sont de la forme :  $x = 17k - 4$  ou  $x = 17k - 8$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
  - c) Les solutions de (E') sont de la forme :  $x = 17k - 13$  ou  $x = 17k + 8$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 4) Soit  $N = (22)^{3n+2} + (13)^{3n+1}$  où  $n$  est un entier naturel, alors:
  - a)  $N \equiv 1$  [9]
  - b)  $N$  est divisible par 9
  - c)  $N \equiv 2$  [9]

**Exercice N°2** (4 points)

On considère la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $U_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$ .

- 1) a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_n \geq 0$ .
  - b) Montrer que  $U$  est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.
- 2) a) En intégrant par parties, calculer  $U_1$ .
  - b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_{n+1} - (n+1)U_n = -\frac{1}{e}$
  - c) En déduire la valeur de  $U_2$ .
- 3) a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq U_n \leq \frac{1}{ne}$ 
  - b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

**Exercice N°3** (6 points)

Soit ABCD un carré de centre O tel que  $(\overline{AB}, \overline{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ . On désigne  $I = A * B$  et  $J = A * D$

On note s la similitude directe tels que  $s(D) = O$  et  $s(C) = I$ .

- 1) a) Déterminer le rapport et l'angle de s.  
b) Soit  $\Omega$  le centre de s. Trouver une construction géométrique de  $\Omega$ .
- 2) a) Préciser les images respectives des droite ( BD ) et ( BC ) par s .  
b) Déterminer alors s ( B ) et s ( A ) et s o s ( B ) .  
c) Montrer que  $\Omega$  est le barycentre des points pondérés ( B , 1 ) et ( J , 4 ) .
- 3) On suppose dans cette question que  $(A, \overline{AB}, \overline{AD})$  un repère orthonormé direct du plan.  
a) Déterminer l'application complexe associée à s.  
b) En déduire l'affixe  $z_0$  de  $\Omega$  centre de s.
- 4) Soit R la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et  $h = R \circ s$ .  
a) Préciser h ( B ) puis caractériser h.  
b) Soit  $\Omega'$  le milieu de  $[\Omega B]$ . Montrer que  $O\Omega\Omega'$  est rectangle et isocèle.

#### Exercice N°4 (6 points)

Soit f la fonction numérique définie par :  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ .

On désigne par (  $\mathcal{C}$  ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé ( O,  $\vec{i}, \vec{j}$  ).

- 1) a. Montrer que f est définie sur  $[1, +\infty[$ .  
b. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement.
- 2) a. Montrer que f est dérivable sur  $]1, +\infty[$  et que  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ .  
b. Dresser le tableau de variation de f.
- 3) a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.  
b. Tracer la courbe (  $\mathcal{C}$  ).
- 4) a. Montrer que f est bijective et tracer, dans le même repère, la courbe (  $\mathcal{C}'$  ) de sa fonction réciproque  $f^{-1}$ .

b. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $f^{-1}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

- 5) L'espace est rapporté à un repère orthonormé ( O,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  ).

Soit S le solide obtenu par la rotation de la partie de (  $\mathcal{C}'$  ) relative à  $[0, 1]$  autour de l'axe ( O,  $\vec{i}$  ).

Calculer le volume de S.

- 6) En intégrant par parties, calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (  $\mathcal{C}$  ), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives:  $x = 1$  et  $x = 2$ .