Direction régionale de l'éducation : Gabès	**Devoir de synthèse n°2** **Mars 2010** **Section : Mathématiques**	Année scolaire : 2009/2010 $4^{ème}$ Maths

Epreuve: Mathématiques - Durée : 4 heures - Coefficient : 4

Exercice n°1 (3 points)

A) Q.C.M

Pour chacune des questions suivantes une seule des réponses est correcte.
L'élève indiquera le numéro et la lettre de cette réponse. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit g la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $g(x)=\int_1^{\ln(x)} \frac{e^t}{t}\,dt$ alors :

a) $g'(x)=\frac{e^x}{x}$ b) $g'(x)=\frac{x}{\ln(x)}$ c) $g'(x)=\frac{1}{\ln(x)}$.

2) Soit $f(x)=xe^{-\frac{1}{x}}$ alors :

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$ b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$ c) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$.

3) Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives $z_A=1+i$ et $z_B=1$.
La symétrie orthogonale d'axe (AB) a pour écriture complexe :

a) $z'=-\overline{z}+2$ b) $z'=(1+i)\overline{z}-1$ c) $z'=(1+i)\overline{z}-i$.

4) Soit $f:\ P\to P$

$M(z)\mapsto M'(z)$ tel que $z'=2i.z+1-2i$.

Alors fof est :

a) Une similitude indirecte de rapport 4.
b) Une similitude directe de rapport 4.
c) Une homothétie de rapport 4.

B) Vrai- Faux

Répondre par vrai ou faux. Aucune justification n'est demandée.

1) Toute similitude possède un seul point invariant.
2) $\forall x \succ 0\,;\ \int_1^x t.\ln(t)\,dt \ge 0$.

Exercice n°2 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{2e^x}{e^x+1}$. On désigne par c la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.

b- Dresser le tableau de variation de f.

2) a- Montrer que le point $I(0,1)$ est un centre de symétrie pour c.

b- Ecrire l'équation de tangente T à c au point I.

c- Tracer T et la courbe c.

3) Soient $\alpha\succ 0$ et $A(\alpha)$ l'aire de la région du plan limitée par la courbe c, les droites d'équations $x=-\alpha$, $x=\alpha$ et $y=0$.

Vérifier que $A(\alpha)=2\alpha$.

Exercice n°3 (5 points)
Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABCD un carré de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On note $J = A * D$, $K = C * D$ et $F = S_D(C)$.

La perpendiculaire en D à la droite (BD) coupe la droite (OJ) en un point E.

1) Soit S la similitude directe telle que S(A) = J et S(B) = D.

a- Déterminer le rapport et l'angle de S.

b- Déterminer les images des droites (BD) et (AD) par la similitude S. En déduire S(D).

2) On désigne par ζ et ζ' les cercles de diamètres respectifs [AJ] et [BD].

a- Soit Ω le centre de S. Montrer que $\Omega \in \zeta \cap \zeta'$ puis construire le point Ω.

b- Montrer que les points Ω , B et E sont alignés.

3) Soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(O) = A$ et $\sigma(K) = B$.

a- Déterminer le rapport de σ.

b- Montrer que C est le centre de σ.

c- Déduire l'axe de σ.

4- Soit $\varphi = S o \sigma$.

a- Déterminer $\varphi(O)$ et $\varphi(K)$.

b- Caractériser alors φ.

Problème (8 points)

1) Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x) = a\ln^2(x) + b\ln(x)$; a et b deux réels.

Déterminer les réels a et b sachant que h admet un minimum en $e^{\frac{1}{2}}$ égale à $(-\frac{1}{4})$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \ln^2(x) - \ln(x)$.

On désigne par c la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a- Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b- Montrer que tout $x \in]0,+\infty[$; $f'(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}$.

c- Dresser le tableau de variation de f.

d- Préciser les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
e- Tracer la courbe $\mathcal{C}$. (On précisera les branches infinies).

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]0, e^{\frac{1}{2}}]$.

a- Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
On désigne par g^{-1} la fonction réciproque de g.

b- Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans I une unique solution α et que $\alpha \in]0,1]$.

c- Tracer la courbe $\mathcal{C}'$ de g^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

d- Montrer que tout $x \in J$; $g^{-1}(x) = e^{\frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{1}{4}}}$.

4) Soit $A = \int_{\alpha}^{1} f(x)\,dx$.

a- Interpréter graphiquement A
b- Calculer A.

c- En déduire la valeur de $K = \int_{0}^{\alpha} e^{-\sqrt{x + \frac{1}{4}}}\,dx$.