Lycée pilote Elkef
Mr : Nsib kais

Devoir de synthèse №2
Mathématiques

$4^{ème}$ M_2
Durée : 4^h
2009-2010

<u>Exercice 1</u> : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des trois propositions est exacte.
Aucune justification n'est demandée.

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x^3)dx =$

A 1

B 0

C 2π

---

2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} =$

A 0

B $+\infty$

C 1

---

3. L'ensemble de définition de la fonction : $x \to \sqrt{1-\ln x}$ est :

A $]0,+\infty[$

B $]0,e]$

C $[1,e]$

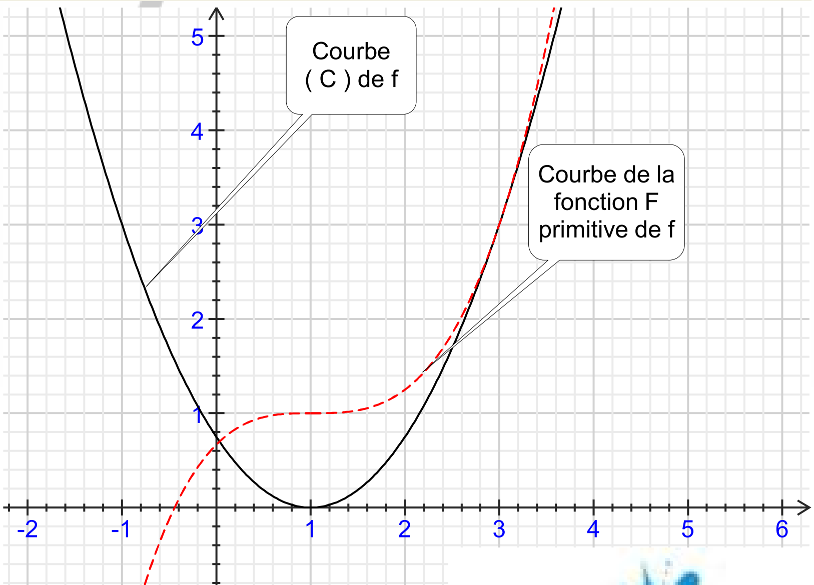
4.

L'aire (en UA) de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites x = 1 , x = 3 et y = 0 est égale à

A 2

B 1

C 3



Exercice 2 : (7 points)

On considère dans le plan orienté un triangle ABC tel que AC = 4, AB = 2 et $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On désigne par Ω le projeté orthogonal de A sur (BC).

1. Soit f la similitude directe qui transforme A en C et B en A.
   a. Déterminer l'angle et le rapport de f.
   b. Montrer que Ω est le centre de f.
   c. On désigne par E le symétrique de Ω par rapport à la droite (AB) et par F le symétrique de Ω par rapport à la droite (AC). Montrer que $A = E * F$ et que $f(E) = F$.
2. Soit g la similitude indirecte qui transforme E en Ω et Ω en F.
   a. Déterminer le rapport de g. On note ω le centre de g.
   b. Déterminer gog(E) .En déduire que ω appartient à la droite (EF).

3.a. Déterminer $g \circ f^{-1}(\Omega)$ et $g \circ f^{-1}(F)$ puis montrer que $g \circ f^{-1} = S_{(AC)}$

   b. Déterminer alors g(A) et g(B).En déduire que ω appartient à la droite (BC).
   c. Construire alors ω et l'axe Δ de g

4. On rapporte le plan au repère orthonormé direct $(A,\vec{i},\vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
   a. Préciser l'affixe de chacun des points A, B et C.
   b. Soit M un point d'affixe z et M' d'affixe z'. Montrer que : f(M) = M' $\Leftrightarrow$ z' = 2iz + 4
   En utilisant la question (3.a) déduire que : g(M) = M' $\Leftrightarrow$ z' = $-2i\bar{z} + 4$
   c. Déterminer l'affixe de chacun des points Ω, ω ainsi q'une équation de la doite Δ .

Exercice 3: (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\ln(1+x^2)$. On désigne par Γ la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{I},\vec{J})$.

1. a. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
   b. Préciser la tangente à Γ au point d'abscisse 0. Tracer Γ.
   c. Tracer la courbe Γ' de la fonction f^{-1} dans le même repère.
2. a. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}$. En déduire l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$
   b. Déterminer alors l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Γ et les droites x = 0 , x = 1 et y = 0.
3. Pour tout n$\in \mathbb{N}$ on pose $U_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2p+4}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ $S_n(x) = x^3 - x^5 + x^7 - \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^n x^{2n+3}$.
   a. Montrer que $S_n(x) = \frac{x^3}{1+x^2} + (-1)^n \frac{x^{2n+5}}{1+x^2}$.
   b. En déduire que $U_n = I + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+5}}{1+x^2}dx$
   c. Montrer que pour tout n$\in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+5}}{1+x^2}dx \leq \frac{1}{2n+6}$. Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 4: (5 points)

Dans le graphique ci-dessous on a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ en gras la courbe Γ d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$. On sait que la partie de Γ représenté sur l'intervalle $[0,1]$ est le demi-cercle de diamètre $[OI]$.

En pointillé on a représenté la courbe de la fonction $g : x \to \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

1. Préciser le signe de f(x) pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$ on pose $F(x) = \int_0^{\ln x} f(t)dt$.

 a. Calculer F(1).

 b. Donner une interprétation graphique de F(e) puis prouver que $F(e) = \frac{\pi}{8}$.

3. a. Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x \succ 0$ $F'(x) = \frac{f(\ln x)}{x}$

 b. Par une simple lecture graphique prouver que pour tout $t \geq 1$ on a : $t-1 \leq f(t) \leq t^2$

 En déduire que pour tout $x \geq e$ on a : $\frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln(x) \leq \int_1^{\ln x} f(t)dt \leq \frac{1}{3}(\ln x)^3$.

 c. Déterminer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

4. a. Montrer que pour tout $x \in]0,1]$ on a : $F(x) \geq -\frac{1}{3}(\ln x)^3$. En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$.

 b. Dresser le tableau de variation de F. Donner l'allure de la courbe de F dans un nouveau repère.