

Exercice 1(3 points)

Dans chacune des questions suivantes il y a une seule réponse exacte, laquelle ?

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \ln^2 x =$

- a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) 0

2) la dérivée de la fonction $g : x \mapsto \int_x^1 \frac{\ln^2(t)}{t} dt$, $x > 0$ est la fonction :

- a) $x \mapsto \frac{\ln^2(x)}{x}$ b) $x \mapsto -\frac{\ln^2(x)}{x}$ c) $x \mapsto \frac{\ln^2(x) - 2\ln(x)}{x^2}$

2) Si f est une similitude directe de centre A de rapport 2 et g est une similitude indirecte de centre A , de rapport $\frac{1}{2}$ alors $f \circ g$ est :

- a) Une rotation. b) Une symétrie orthogonale. c) Une symétrie glissante.

Exercice 2(3 points)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) ; $44x - 5y = 2$

1)a) Justifier que l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b) En utilisant l'algorithme d'Euclide déterminer une solution particulière de l'équation $44x - 5y = 1$

c) En déduire une solution particulière de l'équation $44x - 5y = 2$

2) On considère les entiers n, a, b et c tels que $n = 4a + 2 = 11b + 2 = 5c + 4$

a) Montrer qu'il existe un entier p tel que $a = 11p$ en déduire que $44p - 5c = 2$

b) Résoudre alors dans \mathbb{Z} le système $\begin{cases} n \equiv 2[4] \\ n \equiv 2[11] \\ n \equiv 4[5] \end{cases}$

Exercice 3(points)

Soit la suite u définie sur \mathbb{N}^* par : $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$

1) a) Calculer u_1

b) Montrer que la suite u est croissante majorée par 1.

c) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $1 - u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$

En déduire que $0 \leq 1 - u_n \leq \frac{1}{n+1}$ puis la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

2) En remarquant qu'on a pour tout x de $[0,1]$, $\frac{x^n}{1+x^n} = x \frac{x^{n-1}}{1+x^n}$ et en effectuant une intégration par parties établir l'égalité

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^n} = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$$

Exercice 4 (points 5.5)

le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que f est continue à droite en 0
 b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0, Interpréter le résultat obtenu

2) Soit $g(x) = \ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}$ $x > 0$

a) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de g

En déduire que $\ln \frac{x+1}{x} > \frac{1}{x+1}$ pour tout $x > 0$

3) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et que pour tout $x > 0$ on a $f'(x) = \ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}$

- b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$
 c) Etudier la position \mathcal{C}_f par rapport à la droite Δ d'équation $y=x$ en précisant leurs points d'intersection
 d) *Tracer la courbe \mathcal{C}_f dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$
 **Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0; 1[$.
 Construire $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère

4) Soit α un réel tel que $0 < \alpha < \frac{1}{e-1}$ et $A(\alpha)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par \mathcal{C}_f , l'axe des

abscisses est les droites d'équation $x=\alpha$ et $x = \frac{1}{e-1}$

a) Soit la fonction F définie par :

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{2} \left[x^2 \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + x - \ln(x+1) \right] & \text{si } x > 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que F est la primitive de f sur $[0, +\infty[$ [qui s'annule en 0.

b) Calculer alors $A(\alpha)$, puis déduire $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} A(\alpha)$

Exercice 5 (5.5 points)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD tel que $\angle CAB = \frac{p}{2}$ et $AB = 2AD$.

On désigne par I le milieu de [AB], O le milieu de [BD] et \mathcal{C} le cercle circonscrit au rectangle ABCD

1) a) Montrer qu'il existe un seul antidéplacement f qui transforme A en B et I en C

b) Montrer que f est une symétrie glissante que l'on caractérisera

2) Soit S la similitude directe telle que $S(B) = I$ et $S(I) = D$

a) Montrer que $-\frac{p}{4}$ est une mesure de l'angle de S, calculer le rapport de S

b) Montrer que C est le centre de S

c) On pose $E = S(A)$, montrer que D est le milieu du segment [EI]

3) La demi-droite [CE) recoupe \mathcal{C} en F

a) Calculer CE en fonction de CA et montrer que $CF = \frac{1}{\sqrt{2}} CA$

b) En déduire que F est le milieu du segment [EC] et que $F = S(O)$

4) Soit σ la similitude indirecte qui transforme B en I et I en D

a) Déterminer le rapport de σ

b) On note ω le centre de σ , montrer que ω est le barycentre des points pondérés (D, 1) et (B, -2)

Construire ω

5) Soit Δ l'axe de σ ,

a) Construire l'axe Δ de σ

b) Déterminer $\sigma((BC))$

c) Soit C' l'image de C par σ , montrer alors que C' est la symétrique de C par rapport à I