

**EXERCICE N°1 :** (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une et une seule des trois réponses proposées est exacte. L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspond à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

- 1) La fonction  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$  est égale à :
  - a) 2
  - b) 1
  - c) 0
- 2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln(1 + e^{-x}) =$ 
  - a)  $-\infty$
  - b) 0
  - c)  $+\infty$
- 3) La valeur moyenne de la fonction  $f: x \mapsto 2 \frac{\ln x}{x}$  sur  $[1, e]$  est :
  - a)  $\frac{1}{e-1}$
  - b)  $\frac{2}{e-1}$
  - c)  $\frac{1}{2(e-1)}$
- 4) La fonction  $F: x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$  est définie sur :
  - a)  $]0, +\infty[$
  - b)  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$
  - c)  $]0, \frac{1}{2}[ \cup ]1, +\infty[$
- 5) Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère l'ellipse  $\Gamma: \frac{(x-2)^2}{5} + (y+1)^2 = 1$  est
  - i) d'excentricité :
    - a)  $e = 5$
    - b)  $e = \frac{1}{5}$
    - c)  $e = \frac{2}{\sqrt{5}}$
  - ii) De centre le point :
    - a)  $O(0,0)$
    - b)  $\Omega(-2,1)$
    - c)  $\Omega(2,-1)$

**EXERCICE N°2:** (7 points)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[1, +\infty[$  par :  $f(x) = e^{\sqrt{x-1}}$  et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) a- Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat.  
b- Dresser le tableau de variation de  $f$   
c- Montrer que (C) admet un point d'inflexion I. Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) en I.  
d- Etudier la branche infinie de (C) au voisinage de  $+\infty$   
e- Utiliser la courbe de la fonction exponentielle tracée dans l'annexe ci-jointe figure1, pour construire le point I, la tangente (T) et la courbe (C).
- 2) Soit  $n$  un entier non nul.
  - a- Montrer que l'équation  $f(x) = \frac{n}{x-1}$  admet une unique solution  $\alpha_n$ .
  - b- Vérifier que pour tout entier  $n \geq 3$ ,  $1 < \alpha_n < (\ln n)^2 + 1$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\alpha_n}{n} \right)$ .

- 3) Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$F(x) = \int_1^{1+x^2} f(t) dt$$

- a- Montrer que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $F'(x) = 2xe^{|x|}$ .
- b- En intégrant par parties, calculer  $F(x)$  pour  $x \geq 0$ .
- 4) Calculer  $A$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = 2$ .
- 5) Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $k$  un entier compris entre 0 et  $n-1$ .
  - a- Montrer que :

$$\frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

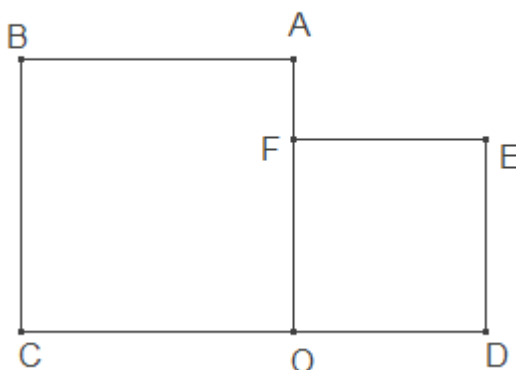
b- On pose  $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

- i) Montrer que  $\frac{1}{n} + A \leq U_n \leq \frac{e}{n} + A$
- ii) En déduire la limite de la suite  $(U_n)$ .

### EXERCICE N°3 : (4 points)

Dans la figure ci-dessous OABC et ODEF sont deux carrés de sens direct.

- 1) Soit S la similitude directe de centre O et qui transforme A en B ;
  - a) Préciser le rapport et l'angle de S.
  - b) Montrer que :  $S(D)=E$ .
- 2) Soit I le point d'intersection des droites (AD) et (BE).
  - a) Montrer que I appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.
  - b) En déduire que IAC est un triangle rectangle.
- 3) a) Déterminer les images de A et D par la rotation R de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .  
b) En déduire que les droites (CF), (AD) et (BE) sont concourantes.
- 4) Soit S' la similitude indirecte A en O et O en B.
  - a) Trouver le rapport de S'.
  - b) Soit  $\Omega$  le centre de S'. Montrer que  $\Omega$  est le symétrique de B par rapport à A.
  - c) Trouver ainsi l'axe de S'.



### EXERCICE N°4 : (6 points)

Dans la figure 2 ; dans l'annexe ci-jointe D est une droite, A est un point n'appartenant pas à D et H son projeté orthogonal sur D.

- 1) Déterminer l'ensemble  $\mathcal{C}$  des foyers F des paraboles de directrice D et passant par A.
- 2) Soit B le foyer de la parabole  $\mathcal{P}$  de sommet A et de directrice D. On muni le plan du repère orthonormé  $(A, \vec{i}, \overrightarrow{AB})$  où  $\vec{i}$  est un vecteur directeur de D.
  - a) Montrer qu'une équation de  $\mathcal{P}$  est  $x^2 = 4y$ . Puis la tracer.
  - b) Soit  $t > 0$ . Vérifier que le point  $G\left(\sqrt{t}, \frac{t}{4}\right)$  est un point de  $\mathcal{P}$ .
  - c) Ecrire une équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à  $\mathcal{P}$  en G.
  - d) Déterminer les coordonnées du point E intersection de la tangente  $\mathcal{T}$  et la directrice D. Puis montrer que le triangle BEG est rectangle en B.
- 3) Soient  $M(x, y)$  un point et K son projeté orthogonal sur D. On considère  $\mathcal{H}$  l'ensemble des points M tel que  $MB^2 - 5MK^2 = 9$ .
  - a) Montrer qu'une équation de  $\mathcal{H}$  est

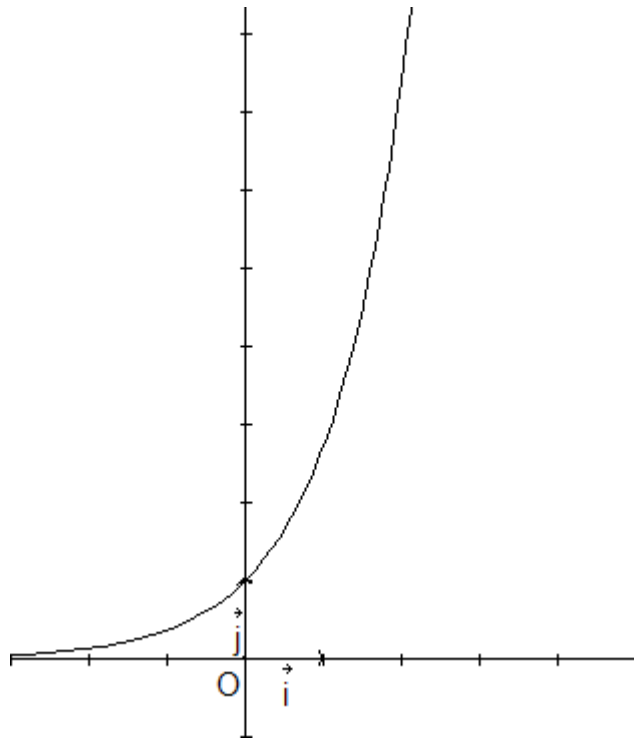
$$\frac{x^2}{4} - \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 1$$

- b) En déduire que  $\mathcal{H}$  est une hyperbole dont on déterminera les coordonnées de ses sommets, de ses foyers et les équations des asymptotes.
- c) Construire  $\mathcal{H}$  dans le même repère par une autre couleur.

**Annexe à rendre :**

PRENOM : ..... NOM : ..... N° : ..... CLASSE : 4M2

**Fig 1**



**Fig 2**

