

EXERCICE N: 1 (4 points)

A) On considère un dé cubique homogène dont les faces sont numérotées : 0, 0, - 1, 1, 1, 1 .

On lance le dé deux fois de suite on notera par **a** le résultat du premier lancée et par **b** celui du deuxième . Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O ; \vec{u} ; \vec{v}) .

On considère la transformation **f** du plan , qui à tout point d'affixe Z , associe le point M' d' affixe : $Z' = (a + i b) Z + i b$.

1) On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles .

Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « f est une symétrie centrale » ; B : « f est une translation »

C : « f est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ »

D : « f est une similitude directe de centre $\Omega (- 1, 0)$ »

2) Soit l'évènement : $E = D / C$. Montrer que $P (E) = \frac{3}{4}$.

B) On considère deux urnes U_1 et U_2 tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 \text{ contient 3 boules blanches et 2 boules noires} \\ U_2 \text{ contient 1 boules blanche et 4 boules noires} \end{array} \right.$$

On lance le dé deux fois de suite :

• Si l'évènement **E** est réalisé , on tire simultanément trois boules de U_1 .

• Si l'évènement **E** n'est pas réalisé , on tire successivement et sans remise trois boules de U_2 .

On désigne par G et F les évènements suivants :

G : « tirer trois boules de la même couleur » ; F : « Tirer deux boules blanches et une boule noire »

1) Calculer $P (G)$ et $P (F)$.

2) On donne H : « Tirer deux boules noires et une boule blanche » .

a) Faites un arbre de probabilité qui modélise la situation .

b) Déduire que $P (\bar{E} / \bar{H}) = \frac{4}{25}$.

EXERCICE N: 2 (4 points)

A) Dans le plan orienté , on considère un losange ABCD tel que $(\overline{BC} ; \overline{BA}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi)$.

On désigne par $E = S_C (A)$, $F = S_B (A)$, **R** la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$,

S la similitude directe qui transforme D en E et C en F et par $h = S \circ R^{-1}$.

1) a) Déterminer $h(C)$ et $h(B)$.

b) En déduire que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport .

c) Déterminer alors les éléments caractéristiques de S .

B) Soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(E) = C$ et $\sigma(F) = B$.

1) a) Déterminer le rapport de σ .

b) En déduire que σ admet un unique point invariant qu'on notera Ω .

2) On désigne par Δ l'axe de la similitude σ et par G le point d'intersection des droites Δ et (CE) .

a) On pose : $G' = \sigma(G)$, montrer que $\overline{\Omega G'} = \frac{1}{2} \overline{\Omega G}$.

b) Montrer que $(\overline{EF}; \overline{\Omega G}) \equiv -(\overline{CB}; \overline{\Omega G}) [2\pi]$.

c) Déduire que les droites Δ et (EF) sont parallèles .

3) Soit $E' = S_{\Delta}(E)$.

a) Montrer que G est le centre de gravité du triangle $\Omega EE'$ et déduire que $\overline{GE} = -2 \overline{GC}$.

b) Construire alors le point G , l'axe Δ et le centre Ω de σ .

EXERCICE N: 3 (4 points)

1) a) Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E) : $6X - 5Y = 7$.

b) Déterminer alors les solutions dans \mathbb{Z} du système suivant :
$$\begin{cases} n \equiv 2[6] \\ n \equiv 9[5] \end{cases}$$

c) Déterminer les solutions dans \mathbb{Z}^2 de l'équation : $(6X - 5Y - 6)(6X - 5Y + 6) = 13$.

2) On considère dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E') : $6X^2 - 5Y^2 = 7$.

a) Montrer que si (X, Y) est une solution de (E') alors $X^2 \equiv 2[5]$.

b) Quel est alors l'ensemble des solutions de (E') ?

3) On considère dans \mathbb{Z}^3 l'équation (E'') : $6X - 5Y - 4Z = 7$.

a) Montrer que Y est impair .

b) On pose : $Y = 2p + 1$; $(p \in \mathbb{Z})$. Montrer que $(Z + p)$ est un multiple de 3 .

c) On pose $Z + p = 3q$; $(q \in \mathbb{Z})$.

Montrer que (X, Y, Z) solution de (E'') si et seulement si
$$\begin{cases} Y = 2p + 1 \\ Z = 3q - p \\ X = p + 2q + 2 \end{cases} \quad (p, q) \in \mathbb{Z}^2$$

d) Retrouver alors les solutions de (E) .

EXERCICE N: 4 (8 points)

A) Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = (e^{-x} - 1) \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par **(Cf)** la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0 .

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu .

2) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = e^x - 1 + x \ln x$.

a) Montrer que l'équation $g'(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une unique solution $\alpha \in]0.1; 0.2[$.

b) Déduire le signe de $g'(x)$ sur $]0; +\infty[$.

3) a) Dresser le tableau de variations de g .

b) Déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une unique solution $\beta \in]0.3; 0.31[$.

4) a) Prouver que $f'(x)$ prend le signe de $-g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

b) Dresser le tableau de variations de f .

c) Tracer la courbe **(Cf)** (On prend : $\beta \approx 0.3$) .

B) Soit $\lambda \in]0; 1[$. On pose $A(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(t) dt$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n(\lambda) = \int_{\lambda}^1 t^n \ln t dt$.

1) a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I_n(\lambda)$.

b) Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} I_n(\lambda) = \frac{-1}{(n+1)^2}$.

2) Pour tout $t \in [0; 1]$, on pose : $\varphi_0(t) = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n(t) = 1 - \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} - \dots + \frac{(-t)^n}{n!}$.

a) Montrer que tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_{n+1}'(t) = -\varphi_n(t)$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0; 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^x \varphi_n(t) dt = 1 - \varphi_{n+1}(x)$.

c) $t \in [0; 1]$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{2n+1}(t) \leq e^{-t} \leq \varphi_{2n}(t)$.

d) En déduire que tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} I_k(\lambda) \leq A(\lambda) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!} I_k(\lambda)$.

3) Soit **A** l'aire de la partie du plan limitée par **(Cf)** et les droites d'équations : $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

a) Soit F une primitive de f sur $]0; +\infty[$. Exprimer $A(\lambda)$ en fonction de $F(\lambda)$.

b) En déduire que $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} A(\lambda) = \mathbf{A}$.

c) Montrer que tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!(k+1)^2} \leq \mathbf{A} \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!(k+1)^2}$.

d) Donner un encadrement de **A** d'amplitude inférieur à 10^{-3} .