Lycée : Feriana

Hamdi Mabrouk – Hizi Fathi

04/03/ 2013

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

MATHÉMATIQUES

4 M 1&2

Durée 4heures

le devoir comporte 3pages numérotées de 1/3 à 3/3

Exercice 1(5points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points **A(1 ,[illegible]) , B(1 ,-1 ,0)** et **C (2, 0 ,1).**

1) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, puis donner une équation du plan $(P_1) = $ **(ABC)**.

2) Soient le plan (P_2) d'équation**: x-2y-2z+6=0 et** Δ : $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$; $t \in IR$

   Montrer que (P_1) et (P_2) sont sécants suivant la droiteΔ.

3) Vérifier que le point **O** est le barycentre des points pondérés **(A ;1) ;(B ;1)** et **(C ;-1).**

4) Soit **(S)** l'ensemble des points **M(x,y,z)** de l'espace tel que $\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right\| = 2\sqrt{3}$.
   a) Montrer que **(S)** est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon .
   b) Trouver les coordonnées des points **D** et **E** intersection de **(S)** et la droite Δ.
   c) Quelle est la nature du triangle **ODE** ? En déduire la distance du point **O** à la droite Δ.

5) Soit **h** l'homothétie de centre **O** et de rapport **2**.
   a) Donner l'expression analytique de **h**.
   b) Donner l'équation du plan **(R) = h**(P_2)
   c) Déterminer **S'** l'image de la sphère **S** par l'homothétie **h**.
   d) Montrer que le plan (P_2) coupe **S'** suivant un cercle. Préciser son centre et son rayon .

Exercice 2(5points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé **(O ;** $\vec{i}$ **,** $\vec{j}$ **)** on considère la parabole **(P)** de foyer **F(2,0)** et de directrice la droite Δ d'équation **x = - 2.**

1) a) Ecrire une équation de **(P).**
   b) Vérifier que les points **O** et **K(2 ,** $\frac{1}{2}$) appartiennent à **(P)** . Placer K et tracer **(P).**

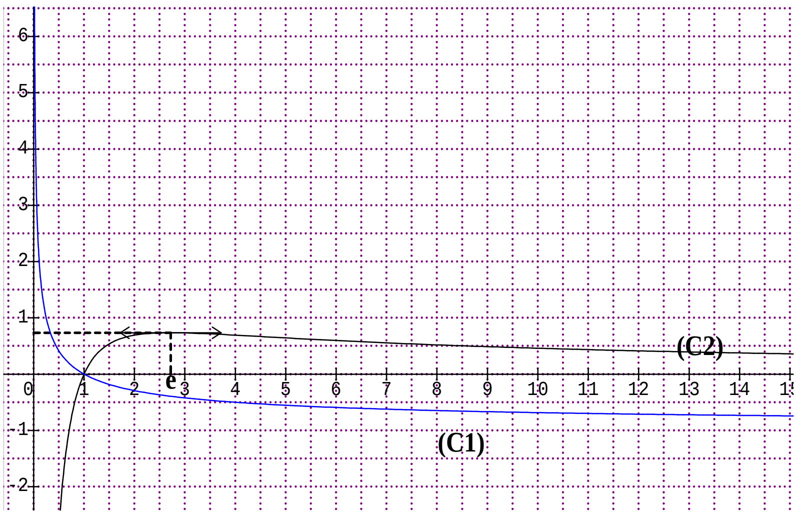
2)Le cercle de centre **F** et de rayon **3** coupe **(P)** en deux points **A** et **B .**
   a) Prouver que $x_A = x_B = 1$**.**
   b) On désigne par $\mathcal{D}$ le domaine limité par la parabole **(P)** et la droite **(AB).**
   Calculer le volume du solide engendré par la rotation de $\mathcal{D}$ autour de l'axe des abscisses.

3)Soit **m** un réel non nul donné et **T** le point de **(P)** d'ordonnée **m.**
   a) Montrer qu'une équation de la tangente à **(P)** en **T** est $y = \frac{4}{m}x + \frac{m}{2}$
   b) **T'** est un point de **(P)** distinct de **T** d'ordonnée **m' (m' ≠m).**
   Les tangentes à **(P)** en **T** et en **T'** se coupent en un point **I.**
   Calculer l'abscisse du point **I** en fonction de **m** et **m'.**

4)Dans cette question on suppose que les tangentes à **(P)** en **T** et en **T'** sont perpendiculaires**.**
   a) Montrer que le point **I** appartient à Δ**.**
   b) Démontrer que les points **T, T'** et **F** sont alignés**.**

Exercice 3 (6points)

Dans le graphique ci-contre **(C1)** et **(C2)** sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de deux fonctions **g** et **h** définies sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \frac{2\ln x}{x}$ et $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$.



- **(C1)** admet **2** asymptotes **y= -1** au **V (+∞)** et **x = 0**
- **(C2)** admet 2 asymptotes **y= 0** au **V (+∞)** et **x = 0** et une tangente horizontale au point d'abscisse **e.**

1) Par une lecture graphique **:**

a) Reconnaitre la courbe de **g** et celle de **h.**

b) Etudier la position de **(C1)** et **(C2).**

2) Soit $f(x) = \ln^2 x - 2\sqrt{x} + x$ pour **x> 0**

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x) = g(x) - h(x)$ **.**

c) Dresser le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$

d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions x_1 **et** x_2 $(x_1 < x_2)$ dans$]0,+\infty[$.

Vérifier que $: 0,3 < x_1 < 0,4$ **et** $2,3 < x_2 < 2,4$

e) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = -\infty$ **.** Interpréter ce résultat**.**

f) Tracer (C_f) et la droite Δ: $y = x$ dans un même repère**.**

3) Pour tout entier naturel **k≥ 1** on désigne par A_k l'aire de la partie limitée par **(C1)** et **(C2)** et les droites d'équations **x = k** et **x = k+1**

a) Montrer que $A_k = f(k+1) - f(k)$ .En déduire A_1**.**

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)\ln(1+\frac{1}{x}) = 0$

c) Vérifier que $\ln(k+1) = \ln k + \ln(1+\frac{1}{k})$. En déduire $\lim\limits_{k\to+\infty} \ln^2(k+1) - \ln^2 k = 0$

d) Prouver que la suite (A_k) converge vers **1**.

Exercice 4(4points)

Dans la figure ci-dessous le solide de révolution **(Γ)** est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation $\boldsymbol{y} = \frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}$, $\boldsymbol{x} \in \left[\boldsymbol{e}\,,\boldsymbol{e}^{\sqrt{3}}\right]$ autour de l'axe $(O\,,\vec{\imath})$.

Le but de l'exercice est de calculer le volume **V** de ce solide.

1) Soit F la fonction définie sur $[\boldsymbol{e}, +\infty[$ par $F(x) = \int_e^x \frac{dt}{t(1+\ln^2 t)}$.

   Vérifier que V= $\boldsymbol{\pi F(e^{\sqrt{3}})}$.

2) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $(x) = \tan x$.

   a) Montrer **g** que est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$.

   b) On note $^{-1}$sa fonction réciproque.

      Montrer que $\boldsymbol{g^{-1}}$ est dérivable sur $[0, +\infty[$. et que pour tout réel positif on a $(\ ^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

3) On désigne par **H** la fonction définie sur $[\boldsymbol{e}, +\infty[$ par $H(x) = \int_1^{\ln x} \frac{dt}{1+t^2}$.

   a) Calculer **H(e)** et $\mathbf{H}(\boldsymbol{e}^{\sqrt{3}})$.(on rappelle que $\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{e}^{\sqrt{3}}) = \sqrt{3}$).

   b) Montrer que H est dérivable sur $[\boldsymbol{e}, +\infty[$ et que $\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$.

   c) En déduire que pour tout réel $\mathbf{x} \geq \boldsymbol{e}$, **F(x) = H(x)**, puis calculer le volume **V.**