MATHEMATIQUES	DEVOIR DE SYNTHESE N° 2 (Durée : 4 heures)
Date : 05/03/2013	Prof : *Mr.Karmous Abdelhamid & Mr.Hassine Salem*

Exercice 1:

Cocher la bonne réponse

1) Le plan est rapporté a un repère orthonormé (o ,i , j) . On considère la conique K d'équation :

$$-x^2 + 2x + \frac{9}{4}y^2 - 10 = 0$$

a) K est une hyperbole d'excentricité $\frac{\sqrt{13}}{2}$ b) K est une hyperbole d'excentricité $\frac{\sqrt{13}}{3}$

c) K est une hyperbole d'excentricité $\frac{\sqrt{13}}{4}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{Ln}(1+\frac{1}{x})$ est égal à :

a) 0 b) 1 c) $+\infty$

3) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par F (x) = $\int_1^{Lnx} t^2dt$ alors :

a) $F'(x) = (Lnx)^2$ b) $F'(x) = (Lnx)^2 - x^2$ c) $F'(x) = \frac{(Lnx)^2}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to4} \frac{x-4}{Ln(\frac{x}{4})}$ est egal à :

a) 4 b) $\frac{1}{4}$ c) 0

5) Soit (H) l'hyperbole de centre O , de sommet S(3 ,o) et de foyer F(5,0) .(H) a pour équation :

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$ c) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

Exercice 2

On considère la suite U définie sur IN* par $U_n = \int_1^e \frac{(Lnx)^n}{x^2}dx$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $U_n \geq 0$

b)Etudier la monotonie de la suite U , en déduire que U est convergente .

2) a) En intégrant par parties , calculer U_1

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $U_{n+1} - (n+1)U_n = -\frac{1}{e}$

c) En déduire la valeur de U_2

3)a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $0 \leq U_n \leq \frac{1}{ne}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit (P) la parabole de foyer 0 est de directrice la droite D d'équation x= - 2.

1) a) Montrer qu'une équation de (P) est $y^2 = 4x+4$
b) Tracer la parabole (P). On notera S son sommet.

2) Soit A $(-2 , \frac{3}{2})$

a) Déterminer, par leurs équations, les tangentes à (P) issues de A.

On notera T_1 etT_2 ces tangentes, M_1 et M_2 leurs points de contact respectifs avec (P).

b) Tracer T_1 et T_2, montrer qu'elles sont perpendiculaires et qui les points O, M_1 et M_2 sont alignés.

3) Soit M un point de P d'affixe, $z = re^{i\theta}$ ($r \in \mathbb{R}_+^*$)

a) Prouver que $\theta \neq 0[2\pi]$

b) Montrer que $r = \frac{2}{1-cos\theta}$

4) Soit M un point de (P) distincts de S. La droite (OM) recoupe (P) en M'

a) Montrer que : $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'}$ est indépendant de θ

b) déterminer la valeur minimal de la distance MM'.

c) Soient N et N' les projets orthogonaux respectifs de M et M' sur l'axe de (P). Montrer que le produit MN.M'N' est constant.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle$[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x}} & si\ x>0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note (C) sa courbe représentative.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Etudier les variations de f.

c) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle que l'on précisera.

d) Tracer (C) et (C') où (C') est la courbe de f^{-1}.

2) x étant un réel tel que $0 < x \leq 1$.

a)Calculer l'intégrale $G(x) = \int_x^1 tf'(t)dt$

b) On pose $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$. Exprimer F(x)+G(x) en fonction de x.

c) Déduire l'expression de F(x) en fonction de x.

3) α étant un réel tel que $0 < \alpha < 1$

a) Calculer l'air $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limité par (C); l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x= α et x=1.

b) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0} \mathcal{A}(\alpha)$

c) En déduire l'aire de la partie du plan limité par (C) , (C') et les droites d'equations respectives x = 1 et y= 1

4) n étant un entier naturel tel que $n \geq 2$

a) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique dans l'intervalle $]0, +\infty[$

b) Montrer que la suite $(\propto_n)$ est décroissante puis qu'elle est convergente.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \propto_n$

d) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \propto_n L_n(n) = 1$

Exercice :5

Dans le plan orienté , on considère le triangle ABC rectangle en A tel que : $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$, et on désigne par

A' = S_C (A).

1) On note S la similitude directe qui transforme A' en C et C en B.

a- Montrer que S est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b- On note Ω le centre de S. En utilisant le théorème d'EL KASHI , montrer que $BC^2 = 3\,\Omega C^2$.

En déduire que (ΩC) est perpendiculaire à (BC).Que peut on dire du triangle ΩCA'

c – E n déduire une construction géométrique du point Ω.

2) Soit f est la similitude indirecte de centre C et qui transforme B en A.

a- Préciser le rapport de f.

b- On note Δ l'axe de f et B' = $h_{(C,\frac{1}{2})}$ (B).

Montrer que : Δ est la médiatrice de [AB'] et construire Δ.

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct R = $(A, \vec{u}, \vec{v})$; où : B est d'affixe $z_B = 2$.

a- Donner l'affixe de C.

b- Déterminer l'écriture complexe de la similitude f.

c- Donner alors une équation cartésienne de la droite Δ.

4) Soit l'application φ telle que : $\varphi = f o S$.

a) Déterminer $\varphi(A')$ et $\varphi(C)$

b) Montrer que φ est une symétrie glissante que l'on caractérisera.