

Exercice 1 (3 points)

Pour chaque question, indiquer par a), b), c) l'unique bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.

1. a) $2013^{62} \equiv 1 \pmod{5}$. b) $2013^{62} \equiv 4 \pmod{13}$. c) $2013^{62} \equiv 1 \pmod{13}$.
2. Soit n un entier tel que : $(11n) \wedge (11^2 \times 5^2 \times 13^2) = 143$ alors :
 a) $n \equiv 0 \pmod{13}$. b) $n \equiv 0 \pmod{11}$ c) $n \equiv 0 \pmod{5}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{-\frac{1}{x}} =$
 a) 0. b) $+\infty$. c) $-\infty$.
4. soit n un entier tel que $n \equiv 19 \pmod{20}$ alors le reste modulo 20 de $n^{100} + n^{181}$ est :
 a) 19. b) 2. c) 0.

Exercice 2 (5 points)

1. (a) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11.
 (b) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5.
 (c) En déduire que $(6^{40} - 1)$ est divisible par 55.
2. Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.
 (a) Montrer que l'équation (E) : $17x - 40y = 1$ admet au moins une solution.
 (b) Vérifier que le couple $(-7, -3)$ est une solution de (E) puis résoudre (E).
 (c) Vérifier qu'il existe un unique entier x_0 que l'on précisera tel que :

$$0 < x_0 < 40 \text{ et } 17x_0 \equiv 1 \pmod{40}.$$
3. Pour tout entier naturel a montrer que :
 si $(a^{17} \equiv b \pmod{55} \text{ et } a^{40} \equiv 1 \pmod{55})$ alors $b^{33} \equiv a \pmod{55}$

Exercice 3 (6 points)

Dans le plan orienté on considère un losange ABCD tel que : $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA} \right) \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$

On désigne par E le symétrique de A par rapport à C et par F le symétrique de A par rapport à B.

Soit R la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Soit S la similitude directe qui transforme D en E et C en F.

A) On pose $h = S \circ R^{-1}$.

1. Déterminer $h(C)$ et $h(B)$.
2. En déduire que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
3. Déterminer les éléments caractéristiques de S.

B) Soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(E) = C$ et $\sigma(F) = B$.

1. Déterminer le rapport de σ . En déduire que σ admet un centre qu'on notera Ω .
2. On désigne par Δ l'axe de σ et G le point d'intersection des droites Δ et (CE).
 On pose $G' = \sigma(G)$. Montrer que $\overrightarrow{\Omega G'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega G}$.



3. (a) Étant donnée une droite \mathcal{D} du plan et \mathcal{D}' son image par S_Δ .
Montrer que si $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$ alors $\mathcal{D} \parallel \Delta$.
- (b) Dédire que $(EF) \parallel \Delta$.
4. Soit $E' = S_\Delta(E)$.
- (a) Montrer que G est le centre de gravité du triangle $\Omega EE'$. En déduire que $\overrightarrow{GE} = -2\overrightarrow{GC}$.
- (b) Construire le point G, l'axe Δ et le centre Ω de σ .

Exercice 4 (6 points)

1. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{2}$.
- (a) Dresser le tableau de variation de g .
- (b) Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$.
2. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}$.
- (a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$ puis dresser le tableau de variation de f .
- (b) Tracer la courbe \mathcal{C}_f de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique = 2 cm).
- (c) Calculer à l'aide d'une intégration par partie l'intégrale $J = \int_1^2 f(x)dx$. En déduire l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par \mathcal{C}_f et les droites d'équations $x = 1$, $x = 2$ et $y = 0$.
3. Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$.
- (a) Montrer que pour tout entier k tel que : $0 \leq k \leq n - 1$,
- $$\frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right).$$
- (b) Montrer que : $J + \frac{f(1)}{n} \leq u_n \leq J + \frac{f(2)}{n}$.
- (c) Dédire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

