

Lycée Martyr Wallid Méchlaoui Mornag	<u>DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2</u>	Le :05/03/2013 4 ^{ème} Math
Prof :Oueslati.Mongi		Durée : 4 H

EXERCICE N°1 (4 points)

Choisir une seule réponse correcte en justifiant.

1) Soit f une fonction définie sur $] -1 ; 1[$ par : $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$. Alors

- a) $f(1)=1$ b) f est paire c) f est strictement croissante sur $] -1 ; 1[$

2) Soit f une fonction définie sur $] 0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 2x - 2 + \frac{\ln x}{x}$. Alors la fonction $x \mapsto x^2 f'(x)$ admet : a) un seul minimum sur $] 0 ; +\infty[$; b) un maximum sur $] 0 ; +\infty[$ c) je ne sais pas

3) On considère la suite $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$. Alors l'égalité $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n}(e^n - 1)$ est :

- a) vrai b) faux c) je ne sais pas

4) Soit f une fonction définie par $f(x) = x - \ln(2 - e^x)$; $u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_n = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n} - 1}$

- a) v_n est une suite géométrique b) v_n est une suite arithmétique

EXERCICE N°2 (5 points)

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que : $(\overline{AB}; \overline{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$; Δ et Δ' deux droites perpendiculaires en A . $\Delta \cap (DC) = \{M\}$; $\Delta' \cap (BC) = \{M'\}$; $I = M * M'$ et $J = A * B$

1) R une rotation de centre A tel que : $R(D) = B$

- a) Montrer que $R((DC)) = (BC)$
b) Montrer que $R(M) = M'$

2) Soit S une similitude directe de centre A et pour tout point $M \neq A$ on a $S(M) = G$

avec G centre de gravité du triangle AMM'

a) Montrer que $AG = \frac{2}{3}AI$

b) En déduire que S de rapport $\frac{\sqrt{2}}{3}$ et de d'angle $-\frac{\pi}{4}$

3) a) Déterminer la similitude directe f tel que $f(J)=B$ et $f(O)=C$

c) Caractériser $g=foS$ puis la forme réduite de g

4) Soit h la similitude indirecte tel que : $h(B)=J$ et $h(D)=K$ avec $S_A(D)=D'$ et $K=A*D'$

a) Déterminer le rapport de h

b) On pose $h(A)=A'$

Montrer que $(\overrightarrow{A'J}; \overrightarrow{A'K}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $A'J=A'K$

c) En déduire que $A'=A$ puis la forme réduite de h

EXERCICE N°3 (6 points)

Soit f_n une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f_n(x)=x-n\ln x$; pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$

1) Étudier les variations de f_3 puis construire C_{f_3} sur la feuille à remettre avec la copie du devoir

2) Montrer que l'équation $f_3(x)=0$ admet exactement deux solutions u_3 et v_3 tel que :

$$u_3 \in]1; 3[\quad \text{et} \quad v_3 \in]3; +\infty[$$

3) a) Étudier les variations de f_n

b) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une solution unique u_n dans $]1; n[$

c) Placer $u_3; u_4; u_5$ et u_6 sur l'axe des abscisses sur la figure

d) Placer $f_3(u_4); f_4(u_5)$ et $f_5(u_6)$ sur l'axe des ordonnées sur la figure

4) a) Montrer que pour entier naturel $n > 2$; $f_{n+1}(u_n) < 0$

b) En déduire que la suite u_n est décroissante et u_n est convergente vers un réel l

c) Montrer que $\frac{\ln u_n}{u_n} = \frac{1}{n}$; en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE N°4 (5 points)

Soit f l'application du plan dans lui-même qui tout point $M(x;y)$ associe le point $M'(X;Y)$

$$\begin{cases} X = x - y \\ Y = x + y \end{cases}$$

1) Montrer que f est une similitude directe de centre O de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

2) Soit (C) la courbe d'équation $3x^2 + 3y^2 - 10xy = 1$ et $f(C) = (C')$

a) Montrer que (C') est une hyperbole d'équation : $4X^2 - Y^2 = 1$

b) Construire (C')

c) En déduire la construction de (C) .

3) Soit (E) l'ellipse d'équation : $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ et le point $A(0;4)$

a) Construire (E)

b) Soit f la fonction définie sur $[-1;1]$ par : $f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$ et

$$F(x) = \int_0^{\sin x} f(t) dt \quad \text{pour } x \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

Calculer $F'(x)$ puis $F(x)$; en déduire A_E l'aire de la partie du plan limitée

Par (E) .

Figure à remettre avec la copie du devoir

