

Devoir de synthèse n°2

04/03/2014

Section :Mathématiques

Epreuve: Mathématiques - Durée : 4 heures - Coefficient : 4

Le sujet comporte 4pages numérotées de 1/4 à 4/4.La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice N°1 (3 points)

Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On donne les similitudes suivantes :

$$f : P \rightarrow P$$

$$g : P \rightarrow P$$

$$M(z) \mapsto M_1(z_1) \text{ tq } z_1 = 2(-\sqrt{3} + i)z + 1$$

et

$$M(z) \mapsto M_2(z_2) \text{ tq } z_2 = 2i\bar{z} - 3$$

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

- 1) Le centre de g a pour affixe : $3 + 6i$.
- 2) L'axe de g a pour équation : $y = x + 1$.
- 3) Si R est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ alors l'application foR est une homothétie de rapport -4 .
- 4) Si h est une homothétie de rapport $(-\frac{1}{4})$ alors l'application hof est une similitude directe d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

Exercice N°2 (4 points)

1) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E) : $6x - 7y = 1$. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation(E).

2) On considère le système(S) :
$$\begin{cases} n \equiv 1 \pmod{6} \\ n \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$
 où n est un entier.

- a) Montrer que : n est une solution de (S) $\Leftrightarrow n \equiv 37 \pmod{42}$.
 - b) Vérifier que 1969 est solution de (S) et déterminer le reste modulo 42 de 1969^{2013}
- 3) a) Donner une solution particulière de (E') : $6x - 7y = 5$.
- b) Déterminer l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de (E').
- 4) Soit (x, y) une solution de (E') et $d = x \wedge y$.
- a) Déterminer les valeurs possibles de d.
 - b) Préciser les solutions de (E') lorsque $d=1$
 - c) On suppose que $d=5$: Déterminer les couples (x, y) solutions de (E').

5) Déterminer les entiers naturels a et b tels que
$$\begin{cases} 6a - 7b = 5 \\ a \wedge b = 5 \\ a \vee b = 150 \end{cases}$$

Exercice N°3 (4.5 points)

On donne les fonctions f_2 et f_3 définies sur $]0, +\infty[$ par : $f_2(x) = \frac{1+2\ln x}{x^2}$ et $f_3(x) = \frac{1+3\ln x}{x^2}$.

Dans la figure donnée en annexe (à rendre) on a tracé la courbe (C_3) de f_3 dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Les axes du repère sont deux asymptotes de (C_3) et la tangente au point B d'abscisse $e^{\frac{1}{6}}$ est horizontale.

1) En se référant au graphique, donner le tableau de variation de f_3

2) a) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$: $f_2'(x) = -\frac{4\ln x}{x^3}$

b) Dresser le tableau de variation de f_2

c) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$: $f_3(x) - f_2(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

En déduire la position relative de (C_2) et (C_3) .

d) Tracer (C_2) dans le même repère.

e) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_2) , (C_3) et les droites $x=1$ et $x=e$.

3) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $f_n(x) = \frac{1+n\ln x}{x^2}$ et C_n sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que pour tout $x > 0$: $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

b) Interpréter alors graphiquement l'intégrale : $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$.

c) On note A_n l'aire de la partie du plan limitée par C_n ; $y=0$; $x=1$ et $x=e$.

Calculer A_2 en cm^2

d) Déterminer la nature de la suite (A_n) et interpréter graphiquement sa raison.

Exercice N°4 (5 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$

On note (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'(x) = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

2) a) Montrer que C_f admet au voisinage de $-\infty$ une branche infinie de direction celle de (O, \vec{j}) .

b) Tracer (C_f) .

3) Soit la fonction g définie sur $]e, +\infty[$ par $g(x) = \int_2^{\ln x} f(t) dt$.

On note (C_g) la courbe de g dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a) Montrer que g est dérivable sur $]e, +\infty[$ et que $g'(x) = \frac{1}{x^2(1-\ln x)}$.

b) En déduire le sens de variation de g .

c) Ecrire une équation de la tangente Δ à (C_g) au point d'abscisse e^2 .

4) Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ par : $U_n = \int_{-1}^0 \frac{e^{-x}}{(1-x)^n} dx$.

a) Montrer que U est décroissante.

b) En déduire que U est convergente.

c) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $U_n = \frac{1}{n-1} \left[1 - \frac{e}{2^{n-1}} + U_{n-1} \right]$.

d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} nU_n$.

Exercice N°5 (3.5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . on donne l'ensemble (\mathcal{C}) des points $M(x, y)$ tels que :

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 3 = 0$$

1) a) Montrer que (\mathcal{C}) est une ellipse dont on précisera le centre Ω et l'excentricité e .

b) Déterminer les sommets et les foyers de (\mathcal{C}) . Tracer (\mathcal{C}) .

2) Soit $\theta \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$ et M_θ le point de coordonnées $(1 + 2\cos\theta; \sin\theta)$.

a) Vérifier que le point M_θ appartient à (\mathcal{C}) .

b) Montrer qu'une équation de la tangente (\mathcal{T}) à (\mathcal{C}) en M_θ est : $x \cos\theta + 2y \sin\theta = 2 + \cos\theta$

3) On désigne par N et P les points d'intersection de (\mathcal{T}) respectivement avec les droites $x = -1$ et $x = 3$.

a) Déterminer les coordonnées de N et P .

b) F étant un foyer de (\mathcal{C}) . Montrer que le triangle NPF est rectangle en F .

Annexe du devoir de synthèse n°2

Nom et prénom :

