

Lycée Martyr Wallid Mechlaoui Mornag	<b>DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2</b>	Le :04/03/2014
Prof :Oueslati.Mongi		4 <sup>ème</sup> Math Duré : 4 H

**EXERCICE N°1** ( 3 points)

Répond par vrai ou faux en justifiant vos repense.

1) Soit l'application  $f$  de  $P$  dans  $P$  qui à tout point  $M(z)$  associe le point  $M'(z')$  tel que

$$z' = 2i\bar{z} - 4 \text{ .Alors l'axe de } f \text{ à pour équation } x=y$$

2) Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  tel que pour tout  $x > 0$  ;  
 $f(-x) = 2f(x)$  ; il existe alors

$$\text{un réel } c \text{ de } [-2 ; 0] \text{ tel que : } \int_0^2 f(t)dt = f(c)$$

3) Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  ;  $F$  sa primitive sur  $\mathbb{R}$  et on a  $I = \int_0^x tf'(t)dt$

Alors  $F$  est une solution de l'équation différentielle (E) :  $xy' - y = I$

**EXERCICE N°2** ( 4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On considère

les points  $M$  ;  $N$  et  $P$  d'affixe respectives  $z$  ;  $\frac{2+z-\bar{z}}{2}$  et  $1+iz$

et  $\Delta$  la droite d'équation  $x=1$

1) Montrer que  $P$  est l'image de  $M$  par une rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  que

l'on précisera le centre

2) Montrer que  $N$  est le projeté orthogonale du point  $M$  sur  $\Delta$

3) Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que  $O$  ;  $N$  et  $P$  soient alignés

a) Montrer qu'une équation cartésienne de  $\mathcal{P}$  est  $x-y(1-y)=0$  .

b) Montrer que  $\mathcal{P}$  est une parabole dont on précisera le sommet ; le foyer et la directrice.

c)  $N$  étant un point donné sur  $\Delta$  ; donner une procédé de construction du point  $M$  de  $\mathcal{P}$

**EXERCICE N°3** ( 4 points)

1) Soit l'équation différentielle (E) :  $y'' + y = 0$

Résoudre (E)

2) Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions deux fois dérivables sur  $]0 ; +\infty[$  tel

que :  $f(x) = xg(\frac{1}{x})$  Montrer que pour tout  $x \in ]0 ; +\infty[$  on a :

$$f''(x) = \frac{1}{x^3} g''(\frac{1}{x})$$

3) Soit l'équation différentielle (E') :  $y'' + \frac{1}{x^4} y = 0$

- a) Montrer que  $g$  est une solution de  $(E')$  si et seulement si  $f$  est une solution de  $(E)$
- b) On prend  $g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ . Montrer que  $g$  est une solution de  $(E')$
- c) Déduire la primitive de la fonction :  $x \mapsto \frac{1}{x^4} g(x)$  sur  $]0; +\infty[$
- d) Calculer alors  $I = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$

### **EXERCICE N°4** ( 5 points)

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{1+e^{2x}}$  ; soit  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) a) Etudier les variations de  $f$   
 b) Montrer que le point  $I(0; \frac{1}{2})$  est un centre de symétrie de  $(C)$   
 c) Construire la courbe  $(C)$ .

2) a) Montrer que qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tel que  $f(x) = a + \frac{be^{2x}}{1+e^{2x}}$

b) Soit  $\alpha > 0$  ; calculer l'aire  $A(\alpha)$  de la partie du plan limité par la courbe  $(C)$  ; la droite d'équation  $x = \alpha$  ;  $x = 0$  et  $y = 0$  puis calculer  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$

3) On pose  $I_n = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} e^{2nt} dt$  ; pour tout  $n \in \mathbb{Z}$

a) Calculer  $I_0$  et  $I_n$  pour  $n \neq 0$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{Z}^*$  et pour tout  $t \in [-1; -\frac{1}{2}]$  on a

$$1 - e^{2t} + e^{4t} - \dots \dots \dots (-1)^{n-1} e^{2(n-1)t} = \frac{1}{1+e^{2t}} - \frac{(-1)^n e^{2nt}}{1+e^{2t}}$$

c) En déduire que

$$I_0 - I_1 + I_2 + \dots \dots \dots + (-1)^{n-1} I_{n-1} = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{dt}{1+e^{2t}} + (-1)^{n+1} \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{2nt}}{1+e^{2t}} dt$$

d) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{Z}^*$   $0 \leq \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} e^{2nt} f(t) dt \leq I_n$  ; en déduire

que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} e^{2nt} f(t) dt = 0$

4) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_0 - I_1 + I_2 - \dots \dots \dots + (-1)^{n-1} I_{n-1}) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{e^2 + 1}{e + 1}\right)$

**EXERCICE N°5** ( 4 points)

Dans le plan orienté ;soit  $ABC$  un triangle isocèle et rectangle en  $A$  tel que :  $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

on désigne par  $I, J, K$  et  $L$  les milieux respectifs des segments  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[AC]$  et  $[JC]$

1) Soit  $f$  la similitude directe de centre  $J$  tel que  $f(A)=K$

a) Déterminer l'angle et le rapport de  $f$

b) Justifier que  $f(K)=L$

c) soit  $H$  le milieu de  $[AJ]$ . Montrer que  $f(I)=H$

2) On munit le plan du repère orthonormé direct  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ . Soit  $g$  du plan dans

lui même qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$

d'affixe  $z' = -\left(\frac{1+i}{2}\right) \cdot \bar{z} + \frac{1+i}{2}$ .

a) Montrer que  $g$  est une similitude indirecte de centre  $C$

b) Donner les affixes de  $I, J$

c) Déterminer  $g(I)$  et  $g(J)$

d) Soit  $\Delta$  l'axe de  $g$ ; tracer  $\Delta$