moêz saidani | **DEVOIR DE SYNTHESE N 2** | Bac maths

EXERCICE N 1 *5 points*

1. (a) On considère la fonction $x \overset{\tan}{\mapsto} \tan x$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ .Montrer que tan est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle que l'on déterminera.

   (b) Soit g la fonction réciproque . Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

2. Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$

   (a) Calculer $F(1)$

      i. Montrer que F est derivable sur $]0, +\infty[$;

      ii. Déduire que pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$ on a : $F(x) = 0$

   (b) On utilisant une intégration par parties on a pour tout x de $]0, +\infty[$
   $$F(x) = \left(g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)\right) \ln x - \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{g(t)}{1+t^2} dt$$

3. Montrer que pour tout $x > 0$ ona: $g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

4. Déduire que pour tout $x > 0$ $\ln x = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{g(t)}{1+t^2} dt$

EXERCICE N 2 *5 points*

PARTIE A:

On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$ et soit ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé directe $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, On prend $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = \left\|\overrightarrow{j}\right\| = 1cm.$

1. Calculer les limites suivantes $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)$; $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x)$.

   (a) Dresser le tableau de variations de f

   (b) Montrer que la fonction f établit une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.Puis dresser le tableau de variation de la fonction réciproque f^{-1}.

2. Calculer $f(1)$ et $f(e)$ puis construire ζ et ζ' la courbe de la fonction f^{-1}.

   (a) Calculer $\displaystyle\int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx$.

   (b) Déduire l'aire de la partie du plan limitée par ζ', $(y = x)$, $(x = 1)$ et $(x = e + 1)$.

PARTIE B :

1. On considère l'équation $(E_n) : x + \ln x = n$.

   (a) Montrer que l'équation (E_n) possède une unique solution x_n.

   (b) Déterminer la laleur de x_1.

   (a) Montrer que pour tout $n > 0 : f(x_n) \leq f(n)$ et déduire que $x_n \leq n$.

   (b) Montrer que pour tout $n > 0 : n - \ln n \leq x_n$.

   (c) Déduire les limites suivantes: $\lim \left(\dfrac{x_n - n}{n}\right)$ et $\lim \left(\dfrac{x_n}{n - \ln n}\right)$.

EXERCICE N 3 *5 points*

Dans le plan orienté ,on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$, $[JK]$

1. Faire une figure

2. Soit f une similitudes direct de centre J de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$

   (a) Vérifier que $f(A) = K$ et $f(K) = L$

   (b) Soit H le milieu du segment $[AJ]$,déterminer $f(I)$.

3. On munit le plan de repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ .Soit φ l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = -\left(\dfrac{1+i}{2}\right)\overline{z} + \dfrac{1+i}{2}$

   (a) Montrer que φ est une similitude indirecte de centre C

   (b) Donner les affixes des points I, J, K et H

   (c) Déterminer $\varphi(I)$ et $\varphi(J)$

   (d) Déduire alors que $\varphi = f \circ S_{(IK)}$(où f est la similitude définie dans 2° et $S_{(IK)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (IK))

4. Soit Δ l'axe de la similitude indirecte φ

(a) Tracer Δ

(b) La droite Δ coupe les droites (IK) et (HL) respectivement en P et Q. Montrer que $\varphi(P) = f(P)$ et en déduire que $\varphi(P) = Q$

EXERCICE N 4 *5 points*

Dans le plan orienté ,On munit le plan de repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
On considère une parabole P d'équation $y^2 = 4x$

1. Déterminer les éléments caractéristiques de cette parabole (directice D, foyer F ,sommet S et paramétre p)

2. soit K un point de la directrice D d'ordonnée 3

   (a) Montrer que la médiatrice de segment $[FK]$ est une tangente à P au point M d'ordonnée 3. Puis construire M

   (b) Montrer que la tangente au sommet S coupe la tangente à P en M en un point I milieu de $[FK]$

3. la droite (MI) recoupe D en J et soit K' le symétrie de K par rapport à J.Montrer que la droite (MI) est parallèle à(FK') .

4. Soit M' l'intersection de la médiatrice de segment $[FK']$ avec la perpendiculaire à D en K'.

   (a) Vérifier que M' est un point de P

   (b) Montrer que les tangentes à P en M et M' sont perpendiculaires.

5. (a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MF}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{FK'}, \overrightarrow{FM'}}\right) [2\pi]$

   (b) Déduire due les points M, F et F' sont alignés

6. Donner l'allure de P

bon courage

sujet traité parLaTeX