| 2017-2018 | Devoir de synthèse n°2 | 4éme math | Durée : 4h |
|---|---|---|---|

## Exercice n°1 :

*Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.*

*1-Soit a et b deux entiers relatifs non nuls, on a* $a \wedge b = (2a+b) \wedge (a+b)$.

*2-la fonction f définie sur IR par* $f(x) = 2e^{1-x}$ *est une solution de l'équation différentielle* $y'+y=0$.

*3-a et b deux entiers naturels, si* $ab \equiv 0 \ (mod\ 6)$ *alors* $a \equiv 0 \ (mod\ 6)$ *et* $b \equiv 0 \ (mod\ 6)$.

*4-soit* $f$ *et* $f_0$ *deux fonctions définies sur IR, si* $f$ *et* $f_0$ *sont deux solutions de* $y''+y=x$ *alors* $f-f_0$ *est une solution de l'équation différentielle* $y''+y=0$.

## Exercice n°2 :

**I-***L'espace est orienté. On considère le repère spatial* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *et ABCE le tétraèdre tel que :* $A(1,2,0)$ , $B(0,1,1)$ , $C(0,-1,3)$ *et* $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

*1-calculer les coordonnés du point E puis calculer l'aire du tétraèdre ABCE.*

*2-soit P le plan d'équation* $P : 2x-2y-z+5=0$. *Montrer que P est parallèle à (ABC).*

*3-soit K le point défini par* $2\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$. *Calculer les coordonnées du point K puis vérifier que k appartient à P.*

*4- a-soit h l'homothétie du centre E qui transforme le point C en K. Déterminer le rapport de h.*

*b/ le plan P coupe les arêtes* [EB] et [EA] en J et I. *Calculer le volume du tétraèdre EIJK.*

*5-déterminer l'image du plan (ABC) par la translation du vecteur* $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AC}$.

**II-***on pose maintenant pour tout* $M(x\,;y\,;z)$ *l'ensemble* $S(\propto)$ *tel que :*

$$\overrightarrow{OM}^2 - 2\cos\propto [\overrightarrow{OM}\,.\,(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})] + 3 - 4\sin^2\propto = 0.$$

*1-a-Donner une équation cartésienne de* $S(\propto)$.

*b-montrer que* $S(\propto)$ *est une sphère dont on note* $I_\propto$ *son centre et* $R_\propto$ *son rayon, prouver que* $I_\propto$ *appartient à une droite fixe* $\Delta$.

*2-a- Déterminer les sphères* $S(\propto)$ *passent par l'origine du repère.*

*b- Montrer que O est le milieu de* $[I_{\pi-\alpha} I_\alpha]$.

*c-En déduire que* $S(\propto)$ *et* $S(\pi-\propto)$ *sont symétriques par rapport à O.*

*3- a-Soit P le plan d'équation :* $x+y+z=0$, *déterminer les coordonnées du H le projeté orthogonal de* $I_\alpha$ *sur P.*

*b-préciser l'intersection de $P$ et $S(\propto)$.*

## Exercice n°3 :

*Une personne fabrique des appareils électroniques .Elle achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0.02.*

### Partie A :

*On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composantes soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise, en on appelle X le nombre de composants défectueux achetés.*

*Une personne achète 50 composants.*

*1-qu'elle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à* $10^{-2}$ prés.

*2-Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux. Donner une valeur approchée de cette probabilité à* $10^{-2}$ prés.

*3-quel est l'espérance de X ? Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux.*

### Partie B :

*On suppose que la durée de vie $T_1$ (en heures) de chaque composant défectueux suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5.10^{-4}$et que la durée de vie $T_2$ (en heures) de chaque composant non défectueux suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$.*

*1-calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1000 heures.*

*a-si ce composant est défectueux.*

*b-si ce composant n'est pas défectueux. (Donner une valeur approchée à $10^{-2}$ prés).*

*2-soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard. Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est* $p(T \geq t) = 0.02e^{-5\times10^{-4}t} + 0.98e^{-10^{-4}t}$.

*3-sachant que le composé acheté est encore en état de fonctionner 1000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux.*

## Exercice n°4 :

*Tous les résultats de cet exercice seront arrondis à $10^{-2}$ prés. Une maison d'édition a ouvert le 1ér janvier 2012, sur internet, un site de vente par correspondance. Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de livres vendus par mois.*

| Mois | Janvier 2012 | Janvier 2013 | Juillet 2013 | Janvier 2014 | Juillet 2014 | Janvier 2015 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang du mois $X_i$ | 1 | 13 | 19 | 25 | 31 | 37 |
| Nombres de livres $Y_i$ | 840 | 2200 | 2960 | 3148 | N | 5300 |

*1-calculer le nombre de livre vendu en janvier 2014 sachant que la moyenne des ventes pendant la période allant de janvier 2012 à janvier 2015 est égal à 3078.*

*2-Dans la suite on prend* $= 4020$ *, représenter dans un repère orthogonal, le nuage de points de la série statistique $(X, Y)$.*

*3-on pose* $z_i = \ln\left(\frac{y_i}{10}\right)$.

*a-Calculer le coefficient de corrélation entre X et Z. un ajustement affine est-il justifié ?*

*b-donner une droite d'ajustement affine D de Z en fonction de X obtenue par la méthode de Moindres carrés.*

*c-En déduire que l'expression de Y en X s'écrit sous la forme* $y = \alpha e^{\beta x}$.

*4-supposant que l'évolution se suivre de même façon.*

*a-Donner une estimation du nombre de livres qui seront vendus en juillet 2016.*

*b-A partir de quelle année peut-on prévoir que le nombre de livres vendus dépasse 20000 ?*

**Exercice n°5 :**

*1-Résoudre dans IR l'équation différentielle $(E_0)$ :* $2y' + y = 0$.

*2-soit l'équation différentielle $(E_1)$ :* $2y' + y = 2e^{\frac{-x}{2}}$.

*a-Montrer que la fonction g définie sur IR par* $g(x) = xe^{\frac{-x}{2}}$ *est une solution de $(E_1)$.*

*b-Montrer qu'une fonction f est solution de $(E_1)$ si et seulement si* $f - g$ *est une solution de $(E_0)$.*

*c-déterminer alors la solution f de $(E_1)$ telle que* $f(0) = 4$.

*3a- Sans utiliser une intégration par partie , calculer pour tout réel x :* $\int_0^x (x+4)e^{\frac{-x}{2}}\,dx$.

*b-En déduire une valeur moyenne de f sur* $[0,2]$.

*4-Soit l'équation différentielle $(E_2)$ :* $2y'' + y' = 2e^{\frac{-x}{2}}$.

*a-posons que* $z = y'$*, écrire l'équation qui doit vérifier z.*

*b-Déterminer alors la solution h de $(E_2)$ telle que :* $h(0) = -1$ *et* $h''(0) = 4$.

**Exercice n°6 :**

Partie A : *soit f la fonction numérique définie sur* $]0;+\infty[$ *par* $f(x)=e^{\frac{1}{lnx}}$. *On pose* $F(x)=\int_{x}^{x+1}f(t)dt$.

*1-a-Montrer que pour tout x> 1, ona* $f(x+1)\leq F(x)\leq f(x)$. *En déduire* $\lim_{x\to+\infty}F(x)$.

*b-Montrer que pour tout* $u\in]0,+\infty[$ *, on a :* $e^{u}\geq u+1$. *En déduire que pour tout x> 1 , on a* $F(x)-1\geq\int_{x}^{x+1}\frac{1}{lnt}dt$.

*2-a-Montrer que pour tout* $u\in]0,+\infty[$ *on a :* $\ln u\leq u-1$.

*b-En déduire que pour tout x> 1, on a* $\int_{x}^{x+1}\frac{1}{lnt}dt\ \geq\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

*3-a-Déduire de ce qui précède* $\lim_{x\to1^{+}}F(x)$.

*b-Dresser le tableau de variation de la fonction F(x).*

*c-Tracer l'allure générale de la courbe F dans un repère orthonormé.*

Partie B : *soit n un entier naturel , n* $\geq 1$. $F_n$ *et* $I_n$ *deux fonctions définies sur* $]1,+\infty[$ *par :* $f_n(x)=\frac{(lnx)^{n}}{n!\,x^{2}}$ *et* $I_n(x)=\int_{1}^{x}f_n(t)dt$.

*1-a-calculer* $I_1(x)$.

*2-a-soit k un entier supérieur ou égale à 1 , en utilisant une intégration par partie : montrer que :*

$$I_{k+1}=I_k-\frac{1}{(k+1)!}.\frac{(lnx)^{k+1}}{x}.$$

*b-En déduire que pour tout n* $\geq 1$*, on a :* $I_n(x)=1-\frac{1}{x}-\frac{lnx}{x}-\frac{(lnx)^{2}}{2!x}-\cdots-\frac{(lnx)^{n-1}}{(n-1)!x}-\frac{(lnx)^{n}}{n!x}$.

*3-Soit* $\alpha\geq1$.

*a-pour tout x> 1 , calculer* $f'_n(x)$ *puis en déduire les variations de* $f_n$.

*b-vérifier que l'extrémum de la fonction* $f_n$ *sur son domaine de définition est* $y_n=\frac{1}{n!}(\frac{n}{2e})^{n}$ .

*c-Montrer que* $0\leq I_n(\alpha)\leq(\alpha-1)y_n$. *Déduire la limite de* $I_n(\alpha)$.

*4-Pour tout x* $\geq 1$*, et n* $\geq 1$ *On pose :* $W_n(x)=1+\frac{lnx}{1!}+\frac{(lnx)^{2}}{2!}+\cdots.+\frac{(lnx)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(lnx)^{n}}{n!}$.

*a-Exprimer* $W_n$ *en fonction de* $I_n$ *puis calculer la limite de* $W(\alpha)$ *lorsque n tend vers plus l'infini.*

*b-déduire de ce qui précède la limite* $\gamma$ *de la suite numérique du terme générale :*

$U_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}$.