Lycée Secondaire Ali Zouaoui	**Devoir de Synthèse N°03** **Durée : 04 heures**	Classe : 4[ème] Maths

Exercice 01 (3 pts):

Dans la série statistique ci-dessous , deux valeurs ont été effacées.

x_i	8,2	7,4	…..	6,1	9
y_i	15	12,1	16,3	….	12

1/ Déterminer les valeurs manquantes sachant que $G(7,5\,;12,6)$

2/ Tracer le nuage des points $M_i(x_i, y_i)$ dans un repère orthogonale $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3/ Comment semblent se répartir les points du nuage ?

Exercice 02 (5 pts):

On considère l'équation différentielle $(E): y''+36\,y=0$.

1/ Donner la forme des solutions de (E).

2/ Déterminer la fonction g solution de (E) satisfaisant aux conditions suivantes :

- La courbe représentative de g passe par le point $A(0,\sqrt{3})$.
- La tangente à (ξ_g) (courbe représentative de g) au point A a pour coefficient directeur 6.

3/ Vérifier que pour tout réel x, on a : $g(x)=2\sin\left(6x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

4/ Calculer la valeur moyenne de g sur $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$.

Exercice n°03(5 pts) :

On effectue une succession de n lancers ($n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$) indépendants avec une pièce de monnaie équilibrée.

- On dit que la première série est de longueur k (où k est un entier tel que $1 \le k \le n-1$) lorsque les k premiers lancers ont amené le même coté de la pièce et le $(k+1)^{\text{ème}}$, l'autre coté de la pièce.
- On dit que la première série est de longueur n lorsque les n lancers ont amené le même coté de la pièce .

On appelle X la variable aléatoire égale à la longueur de la première série.

-A-

1/ Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable X ?

2/ Que peut-on dire de l'évènement $(X=n)$? En déduire $P(X=n)$.

3/ Pour tout $k \in \{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \ldots\ ,\ n-1\}$, exprimer $P(X=k)$ en fonction de k.

-B-

1/ Soit $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}$; $x \in [0,1[$

a) Calculer de deux façons différentes $f'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\,x^{k-1} = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{n\,x^{n-1}}{1-x}$

2/ Vérifier que $1\times\frac{1}{2} + 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (n-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - \frac{n}{2^{n-1}}$

3/ a) Déterminer $E(X)$ en fonction de n.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X)$.

Problème (7 pts) :

-A-

Soit $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{x+2}$; $x \in [-2,+\infty[$; on désigne par (ξ_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ Etudier la dérivabilité de f à droite en -2. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2/ Justifier la dérivabilité de f sur $]-2,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

3/ Dresser le tableau de variation de f puis construire (ξ_f).

4/ a) Montrer que $\forall t \geq 0$, on a : $2e^{\frac{t}{2}} \geq t+2$

b) En déduire que $\forall t \geq 0$, on a : $0 < f(t) \leq \sqrt{2}\, e^{-\frac{t}{4}}$

-B-

Soit $F(x) = \int_0^{\ln(x)} f(t)\,dt$; $x \in [e^{-2},+\infty[$

1/ Montrer que F est dérivable sur $[e^{-2},+\infty[$, et que $F'(x) = \sqrt{\dfrac{2+\ln(x)}{x^3}}$

2/ Calculer $F(1)$ et en déduire que $\forall x \in [e^{-2},+\infty[$, on a : $F(x) = \int_1^x \sqrt{\dfrac{2+\ln(t)}{t^3}}\,dt$

3/ Montrer que $\forall x \geq 1$, on a : $0 \leq F(x) \leq 4\sqrt{2}$

4/a) Montrer que $\forall t \in [e^{-2},1]$, on a : $0 \leq \sqrt{2+\ln(t)} \leq \sqrt{2}$

b) En déduire que $\forall x \in [e^{-2},1]$, on a : $2\sqrt{2}(1-e) \leq F(x) \leq 0$

c) Donner un encadrement de $F(x)$ pour $x \in [e^{-2},+\infty[$

-C-

On considère la suite $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $U_n = \dfrac{2^n \times n!}{(2n+1)!}\displaystyle\int_{-2}^{-1}(x+2)^{n+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}\,dx$

1/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \le U_n \le e.\dfrac{2^n \times n!}{(2n+1)!}$.

2/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \le \dfrac{2^n \times n!}{(2n+1)!} \le \dfrac{1}{2n+1}$.

3/ En déduire que $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l que l'on précisera.

4/ On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2^k \times k!}{(2k+1)!}$; $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} = -2\sqrt{e}\,\dfrac{2^{n+1}\times(n+1)!}{(2n+3)!} + U_n$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $S_n = \dfrac{U_0 - U_n}{2\sqrt{e}}$

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{F\left(\frac{1}{e}\right) - F\left(\frac{1}{e^2}\right)}{2\sqrt{e}}$