Lycée secondaire ALI BOURGUIBA		2008 - 2009
Épreuve : Mathématiques	*Devoir de synthèse n° 3*	*Durée* : 4H
Prof : MAATALLAH	*Le* 07 - 05 - 2009	Classe : 4 *M*

EXERCICE N° 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses est correcte. Relever cette réponse.

1/ On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}dx$ alors on a :

a) $I_n = \frac{1}{(n+1)!} - I_{n+1}$ b) $I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$ c) $I_n = -\frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$

2/ Soit n un entier vérifiant $n^2 + 2n \equiv 3[7]$ alors on a :

a) $n \equiv 2[7]$ b) $n \equiv 3[7]$ c) $n \equiv 4[7]$

3/ Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme dans l'intervalle [0 ; 1] alors on a :

a) $p(X = 0,5) = 0,5$ b) $p(X \geq 0,8 / X \geq 0,5) = 0,3$ c) $p(0,2 \leq X \leq 0,7) = 0,5$

EXERCICE N° 2 (3,5 points)

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population d'un pays de 1970 à 2005. T désigne le rang de l'année et P la population en millions d'habitants.

Année	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005
Rang de l'année : T	0	5	10	15	20	25	30	35
La population : P	8	8,9	9,9	11	12	13,5	15	16,6

1/ Représenter le nuage de points associé à la série statistique (T, P) dans un repère orthogonal.

2/ Calculer le coefficient de corrélation ρ_{TP}. Un ajustement affine est-il fiable ? Si oui, déterminer la droite de régression de P en T et la construire.

3/ Les experts cherchent à modéliser cette évolution par une fonction dont la courbe est voisine du nuage de points. Pour cela, on pose $Y = ln(P)$.

a) **Déterminer une équation de la droite de régression de Y en T.**

b) **En déduire l'expression de la population P en fonction de T.**

4/ On admet que la fonction f définie sur [0 , 35] par : $f(t) = 8e^{0,02t}$ est une modélisation satisfaisante de l'évolution de la population (en millions d'habitants) de 1970 à 2005 .

a) **Etudier le sens de variation de f sur [0 , 35] et construire sa courbe (C_f) dans le même repère .**

b) **Calculer $I = \int_0^{35} f(t)dt$. En déduire la population moyenne du pays durant ces 35 années.**

c) **Si le modèle exponentielle reste valable après 2005 , en quelle année la population aurait-elle dépassé 20 millions d'habitants ?**

EXERCICE N° 3 (4 points)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 : U_1 contient une boule blanche et quatre boules noires , U_2 contient trois boules blanches et deux boules noires.

1/ On considère l'épreuve suivante : On choisit une urne au hasard et on tire simultanément trois boules.

a) **Calculer la probabilité de l'évènement A : « Obtenir trois boules de la même couleur ».**

b) **On répète l'épreuve précédente n fois de suite ($n \geq 2$) en remettant les boules dans leur propre urne après chaque épreuve. Calculer la probabilité p_n d'obtenir au moins une fois l'évènement A .**

c) **Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0,998$.**

2/ On tire simultanément deux boules de U_1 qu'on les place dans U_2 puis on tire simultanément deux boules de U_2 qu'on les place dans U_1.

a) **Soit l'évènement B : « la répartition des couleurs reste inchangée dans les urnes ».**

b) Calculer la probabilité de l'évènement C : « Tirer la boule blanche de U_1 sachant que l'évènement B est réalisé ».

c) Soit X la variable aléatoire définie par le nombre de boules blanches qui restent dans U_2 à la fin du jeu. Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

3/ On effectue n tirages successifs de l'épreuve précédente (2°/) avec $n \geq 2$, en remettant les boules dans leurs propres urnes après chaque épreuve.

a) Déterminer la probabilité p_k d'avoir réaliser l'évènement B pour la première fois à la $k^{ième}$ épreuve avec $2 \leq k \leq n$.

b) Calculer en fonction de n , $S_n = \sum_{k=2}^{n} p_k$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

EXERCICE N° 4 (3 ,5 points)

Dans l'espace rapporté à un R.O.N.D $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A(1,1,1) , B(2,-1,0) et C(-1,-1,1)

1/ Montrer qu'une équation cartésienne du plan $P = (ABC)$ est : $x - y + 3z - 3 = 0$.

2/ Montrer que les points A ,B,C et O ne sont pas coplanaires . En déduire le volume du tétraèdre ABCO .

3/ Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z - 5 = 0$

a) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.

b) Montrer que le plan P coupe (S) suivant un cercle (φ) dont on précisera le centre et le rayon.

4/ Soit $h_{(O,2)}$ l'homothétie de centre O et de rapport 2.

a) Déterminer les expressions analytiques de $h_{(O,2)}$ puis calculer les coordonnées des points B',C'et A' images respectives de B,C et A par $h_{(O,2)}$.En déduire une équation cartésienne du plan $P' = h_{(O,2)}(P)$

b) Déterminer une équation cartésienne de la sphère $S' = h_{(O,2)}(S)$

EXERCICE N° 5 (6 points)

1/ Soit f la fonction définie sur]1,+∞ [par : $f(x) = ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{2}{x}$. On note (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

a) Etudier les variations de f. En déduire que $\forall x \in]1,+\infty[$, $f(x) > 0$ puis tracer la courbe (C_f)

b) Soit $\alpha \in]1,2[$. Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) et les droites d'équations : $y = 0$, $x = \alpha$ et $x = 2$. Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 1^+} \mathcal{A}(\alpha)$

2/ Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Soit l'équation différentielle (E_n) : $ny' - y = \frac{x+1}{n+1}$

a) Résoudre l'équation différentielle (E) : $ny' - y = 0$

b) Déterminer les réels a et b pour que la fonction $h: x \mapsto ax + b$ soit une solution de (E_n)

c) Montrer qu'une fonction g est une solution de l'équation (E_n) si et seulement si $(g - h)$ est une solution de (E) . Donner la solution g de (E_n) tel que : $g(n) = e - 1 - \frac{n}{n+1}$

3/ On pose $f_n(x) = x - n ln(1 + \frac{x}{n+1})$, $\forall x \in]-n-1, +\infty[$

a) Dresser le tableau de variation de f_n et vérifier que $f_n(-2) = nf(n)$

b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans [-2,-1] une unique solution α_n. Montrer que $g(\alpha_n) = 0$

c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$: $x^3 \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} e^{tx} dt = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$

d) On pose $F(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} e^{tx} dt$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall x < 0$ on a : $\frac{e^x}{6} \leq F(x) \leq \frac{1}{6}$. En déduire $\lim\limits_{x \to 0^-} F(x)$

e) Vérifier que : $e^{\frac{\alpha_n}{n}} = 1 + \frac{\alpha_n}{n} + \frac{\alpha_n^2}{2n^2} + \frac{\alpha_n^3}{n^3} F(\frac{\alpha_n}{n})$. En déduire que $\alpha_n = -\frac{2n}{(n+1)} - \frac{2\alpha_n^2}{n} F(\frac{\alpha_n}{n})$

f) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2\alpha_n^2}{n} F\left(\frac{\alpha_n}{n}\right) = 0$. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = -2$