

**EXERCICE N° 1 (3 points)**

Dire vrai ou faux en justifiant la réponse:

1/ Un feu tricolore de circulation reste 55 secondes au vert, 5 secondes à l'orange et 60 secondes au rouge. Un piéton traverse à ce feu entre 8 h 00 et 8 h 05. A 8 h 00, ce feu se met au rouge. On appelle  $T$  la variable aléatoire qui donne, en secondes, le temps écoulé entre 8 h 00 et l'heure d'arrivée devant ce feu du piéton qui souhaite traverser. On admet que  $T$  suit une loi uniformément répartie sur l'intervalle  $[0 ; 300]$ .

a) La densité de probabilité associée à  $T$  est la fonction  $f$  ainsi définie :

$$f(t) = \frac{1}{3} \text{ si } t \in [0 ; 60[ \text{ ou si } t \in [120 ; 180[ \text{ ou si } t \in [240 ; 300[ ; f(t) = 0 \text{ dans les autres cas.}$$

b) La probabilité que le piéton attende moins de 10 secondes est  $\frac{2}{3}$ .

c) Entre 8 h 00 et 8 h 05, 10 piétons se présentent à ce feu tricolore. La probabilité que 3 d'entre eux exactement aient attendu moins de 10 secondes est  $\frac{2^3}{3^{10}}$ .

2/ La durée de vie d'un appareil, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,1. Alors :

a)  $P(X > 6) = e^{-0,6}$ .

b)  $P(X \leq 5) = P(X \geq 5)$ .

c)  $P(X \leq 6 / X \geq 3) = P(X \leq 3)$

**EXERCICE N° 2 (3 points)**

Le tableau suivant donne le nombre annuel de véhicules vendus les cinq premières années de commercialisation :

Année	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année : $x_i$	0	1	2	3	4
Nombre annuel de véhicules vendus en milliers : $y_i$	81,3	92,3	109,7	128,5	131,2

1/ a) Représenter le nuage de points associé à cette série statistique. Déterminer les coordonnées du point moyen  $G$ .

b) Déterminer et construire la droite de régression de  $Y$  en  $X$ . Estimer le nombre de véhicules vendus en 2008.

2/ Le tableau suivant donne le nombre annuel de véhicules vendus, exprimé en milliers, de 2004 à 2008 :

Année	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année : $x_i$	4	5	6	7	8
Nombre annuel de véhicules vendus en milliers : $y_i$	131,2	110,8	101,4	86,3	76,1

a) Compléter le nuage de points précédent à l'aide de ces valeurs. L'ajustement précédent est-il encore adapté ?

b) On ajuste le nuage de points, par une courbe d'équation :  $y = e^{cx+d}$ .

Déterminer les réels  $c$  et  $d$  pour que cette courbe passe par les points (4 ; 131,2) et (8 ; 76,1).

3/ Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[4 ; 10]$  par :  $f(x) = e^{-0,136x+5,421}$

On suppose que  $f$  modélise en milliers l'évolution du nombre annuel de véhicules vendus à partir de 2004.

a) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[4 ; 10]$ . Tracer la courbe  $(C)$  de  $f$  dans le même repère que le nuage de points.

b) L'entreprise décide d'arrêter la fabrication du modèle l'année où le nombre annuel de véhicules vendus devient inférieur à 65 000. Résoudre l'inéquation :  $f(x) \leq 65$ . En quelle année l'entreprise doit-elle prévoir cet arrêt ?

**EXERCICE N° 3 (4 points)**

A/ Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fautive en justifiant la réponse.

a) Pour tout entier naturel  $n$ , 3 divise le nombre  $2^{2n} - 1$ .

b) Si un entier relatif  $x$  est solution de l'équation :  $x^2 + x \equiv 0 \pmod{6}$  alors  $x \equiv 0 \pmod{3}$

c) L'ensemble des solutions de l'équation  $12x - 5y = 3$  est l'ensemble des couples  $(4 + 10k, 9 + 24k)$  où  $k \in \mathbb{Z}$

d) Il existe un couple  $(a ; b)$  de nombres entiers naturels tel que  $a < b$  et  $\text{PPCM}(a ; b) - \text{PGCD}(a ; b) = 1$ .

B/ 1/ a) Déterminer le reste de la division euclidienne de  $2009^2$  par 16.

b) En déduire que  $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{16}$ .

2/ On considère la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $U_0 = 2009^2 - 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = (U_n + 1)^5 - 1$

a) Démontrer que  $U_0$  est divisible par 5.

b) Démontrer  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n[U_n^4 + 5(U_n^3 + 2U_n^2 + 2U_n + 1)]$

c) Démontrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n$  est divisible par  $5^{n+1}$ .

d) Vérifier que  $U_3 = 2009^{250} - 1$  puis en déduire que  $2009^{250} \equiv 1 \pmod{625}$ .

e) Montrer que  $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{625}$  et que  $2009^{8001} - 2009$  est divisible par 10000.

### EXERCICE N° 4 ( 4 points )

On dispose d'une urne  $U_1$  contenant 1 boule blanche et 3 boules noires et d'une urne  $U_2$  contenant 3 boules blanches, 2 boules noires et une boule rouge.

- On choisit au hasard une urne :

■) Si c'est  $U_1$ , on y tire une par une et avec remise 3 boules.

■ ■) Si c'est  $U_2$ , on y tire une par une et sans remise 4 boules.

1/ a) calculer la probabilité de l'événement A : « on obtient 2 boules blanches ».

b) Soit X l'aléa numérique qui, après un tirage, indique le nombre de boules blanches obtenues.

Etablir la loi de probabilité de X.

c) Déduire la probabilité de l'événement B : « Il reste dans l'urne choisie une seule boule blanche ».

2/ L'urne choisie étant  $U_2$  et le tirage étant comme auparavant, on considère le jeu suivant :

■) Après un tirage, les boules blanches obtenues seront éliminées dans  $U_1$  et les autres seront remises dans  $U_2$ .

■ ■) On répète le tirage de  $U_2$ , dans ces conditions, dans l'objectif de vider toutes les boules blanches de  $U_2$  dans  $U_1$ .

■ ■ ■) Si l'objectif est réalisé au plus au  $2^{\text{ième}}$  tirage, on gagne  $\frac{N}{i}$  dinars (i est le numéro du tirage qui achève le jeu).

Sinon, le jeu s'arrête et on perd  $N^2$  dinars.

a) Soit Y le gain algébrique d'un joueur.

- Etablir la loi de probabilité de Y.

- Déterminer N pour que ce jeu soit équitable. Pour quelles valeurs de N ce jeu devient défavorable ?

b) Le jeu étant équitable, 5 personnes se présentent à ce jeu. Soit Z la variable aléatoire qui indique le nombre de personnes gagnantes.

- Calculer  $P(Z \leq 4)$ . Calculer  $E(Z)$  et  $V(Z)$ .

- Calculer la probabilité de l'événement C : « La somme gagnée par quatre joueurs et supérieure à 20 dinars ».

### EXERCICE N° 5 ( 6 points )

Soit u et v deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ . (C) et ( $\Gamma$ ) sont leurs courbes dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  représentées dans la page 3.

1/ On admet que  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, \frac{u'(x)}{v'(x)} > -1$ . Soit f la fonction définie par :  $f(x) = u(x) + v(x)$  et ( $C_f$ ) sa courbe dans le même repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

a) Montrer que (C) est nécessairement la courbe de u.

b) Etudier, à l'aide du graphique, les branches infinies de ( $C_f$ ) et le signe de  $f'(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

c) Dresser le tableau de variation de f. Construire ( $C_f$ ) et préciser la tangente T à ( $C_f$ ) au point d'abscisse 0

2/ On considère l'équation différentielle (E) :  $2y' - y = 4e^{\frac{x}{2}}$ . Soit g une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = g(x)e^{-\frac{x}{2}}$ .

a) Déterminer les fonctions  $\varphi$  de sorte que g soit une solution de (E).

b) En déduire la solution  $h$  de  $(E)$  telle que :  $h(0) = 0$ .

c) On admet que  $f = P \circ h$  avec  $P$  un polynôme du second degré. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$ .

d) Montrer par le calcul que  $0$  est l'unique solution dans  $\mathbb{R}$  de l'équation :  $f(x) = 0$ .

3/a) Dresser le tableau de variation de  $F: x \mapsto \ln |f(x)|$ .

b) Montrer que :  $F(x) = 0$  admet dans  $]0, +\infty[$  une solution unique  $\alpha$  et établir que :  $e^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{6}-2}{2\alpha}$

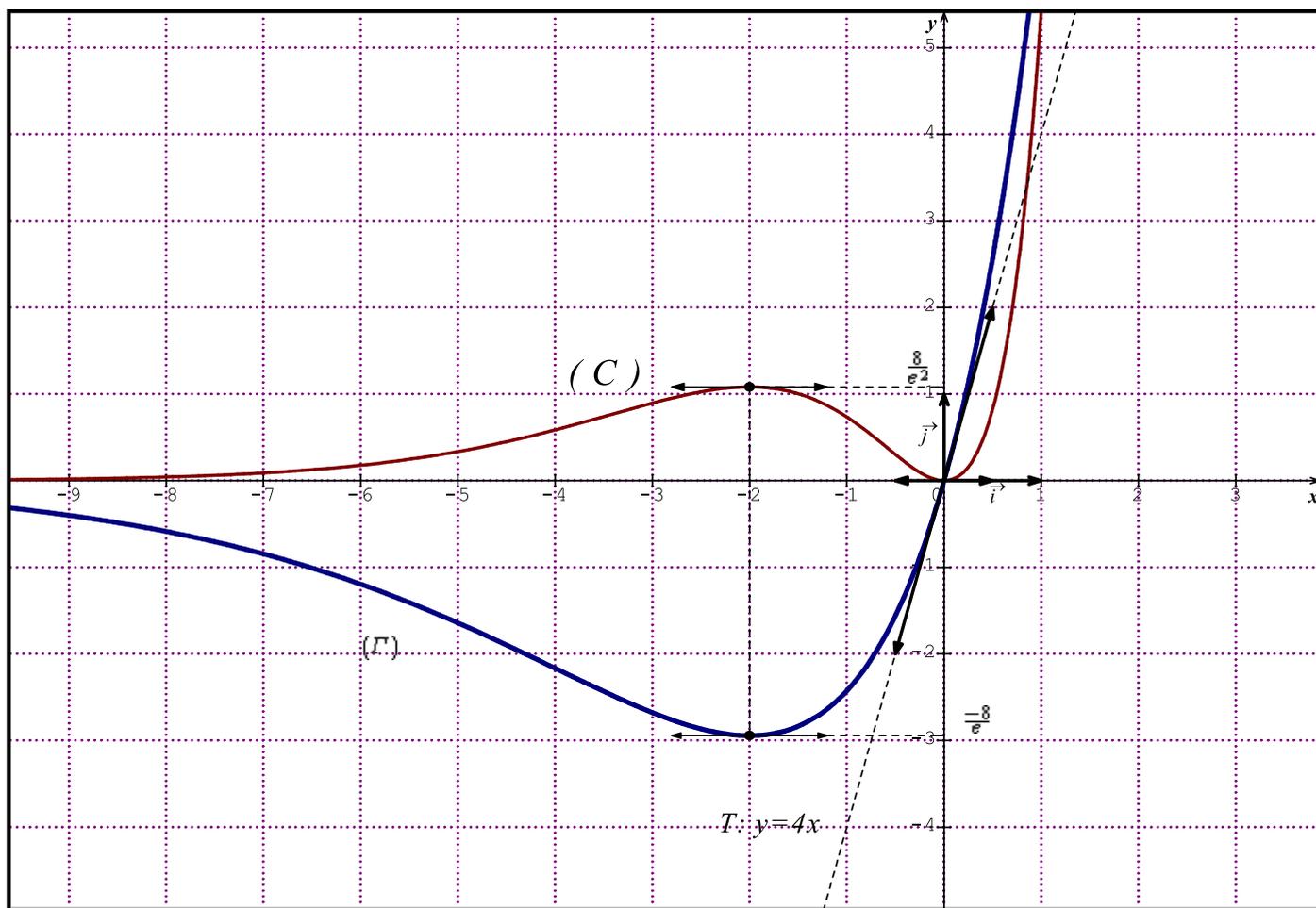
4/ Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 3 et  $(U_p)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $U_p = \int_{-1}^{-\ln(n)} f(t)e^{-\frac{1}{t^p}} dt$ .

a) Montrer que  $\forall x \in ]0, \frac{1}{e}[$ ,  $x + \ln(x) < 0$ . Déduire que  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_p \geq 0$ .

b) Etudier la monotonie de  $(U_p)$  et déduire qu'elle converge. Soit  $I_n$  sa limite.

c) Montrer que  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_{-1}^{-\ln(n)} f(t)e^{\frac{1}{p \ln(n)t}} dt \leq U_p \leq \int_{-1}^{-\ln(n)} f(t)e^{\frac{n}{p}} dt$  et déduire  $I_n$ .

d) Calculer  $I_n$  en fonction de  $n$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  et interpréter graphiquement le résultat.



Bonne chance et excellente réussite au Baccalauréat