Lycée rue Fattouma Bourguiba Monastir Lycée Bourguiba Monastir Lycée Sayada	**Devoir De Synthèse N° : 3**
Zemni F – Abbes A – Zouheir A – Hergli R – Younes R	Mathématiques Le 13 / 05 / 2011 Durée 4^H

❖ Exercice N°1 : (3 Points)

Pour chacune des questions suivantes , une et une seule des propositions est exacte. La quelle ? Aucune justification n'est demandée .

A) Soient les suites u et v définies sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \int_0^1 \left(e^{\frac{nx}{2}} \cos x\right)^2 dx$ et $v_n = \int_0^1 \left(e^{\frac{nx}{2}} \sin x\right)^2 dx$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n + v_n =$

a) $\dfrac{e^n - 1}{n}$ b) $\dfrac{1 - e^n}{n}$ c) $n\left(e^n - 1\right)$

2) La suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \ln\left(1 + t^2\right) dt$ est :

a) Croissante b) Décroissante c) Non monotone

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n - n^{2011} =$

a) $-\infty$ b) 0 c) $+\infty$

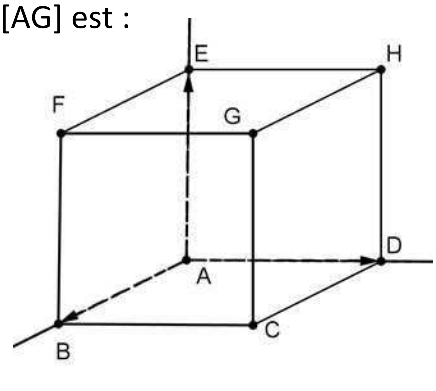
B) Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1. L'espace est rapporté au repère ON direct $(A , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AE})$.

1) Une équation cartésienne du plan médiateur du segment [AG] est :

a) $2x + 2y + 2z - 3 = 0$.

b) $x + y - 1 = 0$.

c) $-2x + 2y + 2z - 1 = 0$.



2) Le volume du tétraèdre ABDG est :

a) $\dfrac{1}{6}$ b) $\dfrac{4}{3}$ c) $\dfrac{3}{2}$.

3) Soit I le point de l'espace défini par $\overrightarrow{EI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{EF}$. L'homothétie de centre I qui transforme le plan (ACF) en (EDG) a pour expressions analytiques :

a) $\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \\ z' = -2z \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = -2x + 2 \\ y' = -2y \\ z' = -2z + 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = 2x + 2 \\ y' = 2y \\ z' = 2z + 3 \end{cases}$.

❖ Exercice N°2 : (3 points)

Le tableau suivant indique la teneur de l'air en dioxyde de carbone (CO_2), observé depuis le début de l'ère industrielle. Dans le tableau ci-contre, X désigne le rang de l'année et Y la teneur en CO_2 répartie par million.

Année	1850	1900	1950	1990
Rang X de l'année	0	50	100	140
Teneur en CO_2	275	290	315	350

1) a) Représenter le nuage de points de cette série (X,Y).

b) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrées.

c) En utilisant cet ajustement, donner une estimation de la teneur en CO_2 pour l'année 2011.

2) La forme du nuage de points des points permet d'envisager un ajustement exponentiel; pour cela on pose $Z = \ln(Y - 250)$.

a) Reproduire et compléter le tableau suivant :

Rang X de l'année	0	50	100	140
Z				

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (X , Z). Interpréter le résultat obtenu.

c) Déterminer une équation de la droite de régression de Z en X .

d) Selon ce modèle , quelle teneur en CO_2 peut-on estimer pour l'année 2011.

❖ Exercice N°3 : (4 points)

Soit ABC un triangle rectangle tel que AB = 2AC et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\ ]$. On pose I = A*B et D le point tel que $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. On considère la similitude indirecte f tel f(A) = B et f(C) = A.

1) Déterminer le rapport de f.

2) Soit Ω le centre de f. Montrer que $\Omega = S_D(B)$.

3) Construire D' = f(D).

4) Soit Δ la médiatrice de $[AD]$. Vérifier que $\Omega \in \Delta$ et que Δ est l'axe de f.

5) On rapporte le plan à un repère orthonormé $(A , \overrightarrow{AI} , \overrightarrow{AC})$.

a) Déterminer l'écriture complexe de f.

b) En déduire l'affixe de Ω et une équation de Δ.

❖ Exercice N°4 : (5 points)

1) Résoudre dans Î xÎ , l'équation : $7x - 13y = 1$ (E).

2) On considère dans Î xÎ , l'équation : $7x - 13y = -4$ (E').

a) Vérifier que le couple (5 , 3) est une solution particulière de (E').

b) Résoudre dans Î xÎ , l'équation (E').

3) Soit dans Î le système (S) : $\begin{cases} n \equiv 5 \pmod{13} \\ n \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$

a) Montrer que le système (S) est équivaut à (S') : $\begin{cases} 7n \equiv 35 \pmod{91} \\ 13n \equiv 39 \pmod{91} \end{cases}$

b) En déduire qu'un entier n est une solution de (S) si et seulement si $n \equiv 31 \pmod{91}$.

4) Pour tout entier n, on pose $a = 13n - 8$ et $b = 7n - 4$.

a) Montrer que le couple (a , b) est une solution de l'équation (E').

En déduire les valeurs possibles de $a \wedge b$.

b) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels $a \wedge b = 2$.

❖ Exercice N°5 : (5 points)

1) Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x \ln x}$.

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet dans $[1, +\infty[$ une unique solution α. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

2) Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{\ln x}$ et ζ_f sa courbe dans un repère ON

a) Etudier la dérivabilité de f à droite de 1. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) L'annexe représente les courbes représentatives ζ_1, ζ_2 et ζ_3 respectives des fonctions :

$x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sqrt{\ln x}$ et $x \mapsto 2\sqrt{\ln x}$.

a) Placer dans l'annexe, les points d'intersection de ζ_f et ζ_2.

b) Tracer la courbe ζ_f.

4) Placer les points M et N de ζ_1 et ζ_2 de même abscisse pour lesquels la distance MN est minimale.

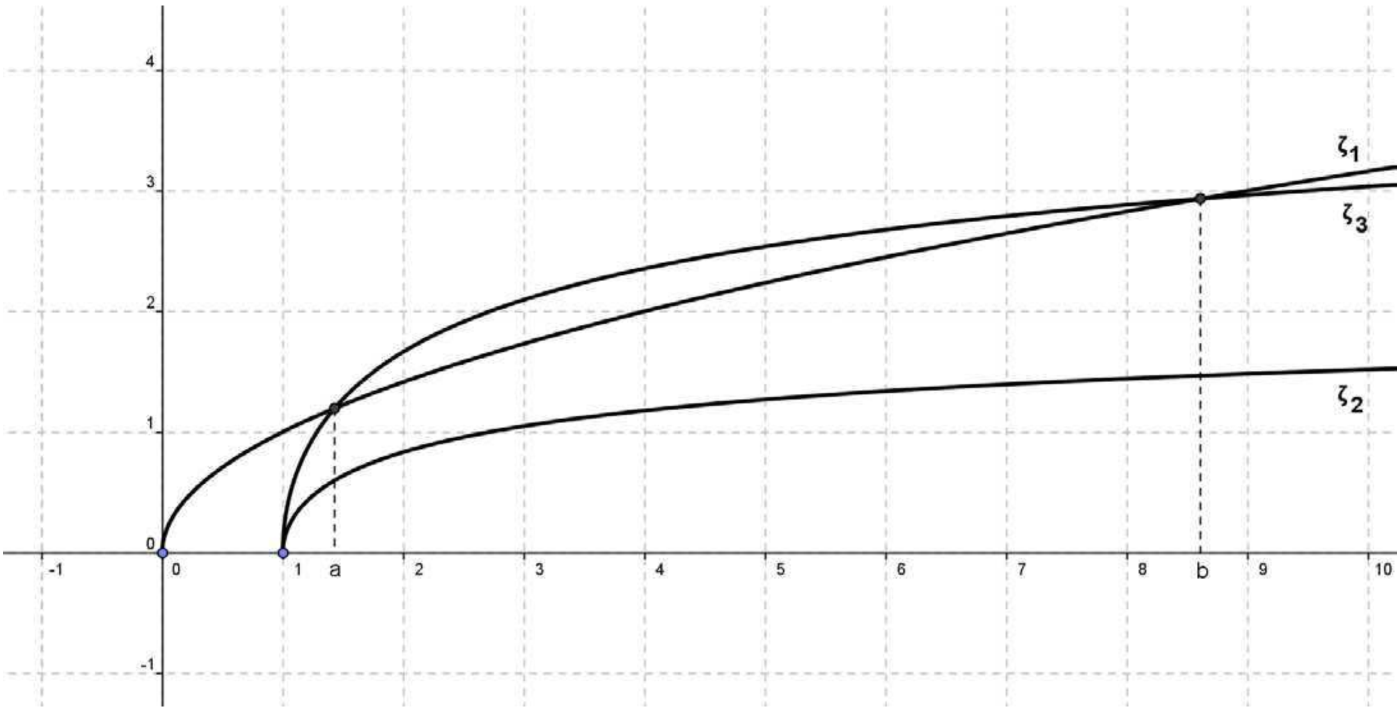
5) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par ζ_f, ζ_2 et les droites x = a et x = b.

$\mathcal{A}'$ l'aire de la partie du plan limitée par ζ_1, ζ_3 et les droites x = a et x = b. Comparer $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$.

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

NOM : ………………………………………………

PRENOM : …………………………………….



(Figure de l'exercice 5)